F1509/4

R

48. 1986.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREST

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR

SERIA TRANSPORTURI—AERONAVE

TOMUL XLVIII, ANUL 1986

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL : Prof. dr. ing. *Voicu Tache*
MEMBRII : Prof. dr ing. *Constantin Bălă* ; Conf. dr. ing. *Cornel Berbente* ; Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R. S. România ; Prof. dr. ing. *Ioan Carabogdan* ; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific) ; Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu* ; Prof. dr. docent *Felicia Cornea* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu* ; Prof. dr. docent *Traian Demian* (redactor responsabil adjunct) ; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea* ; Prof. dr. ing. *Julieta Florea* ; Prof. dr. ing *Nicolae Geru* ; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald* ; Prof. dr. *Ion Grădișteanu* ; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan* ; Prof. dr. ing. *Moise Ienciu* ; Prof. dr. ing. *Vlad Ionescu* ; Prof. dr. ing. *Adelaida Mateescu* ; Prof. ing. *Jean Moncea* ; Prof. dr. ing. *Nicolae Murguleț* ; Prof. dr. docent *Florea Oprea* ; Prof. dr ing. *Aurel Oprean* ; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu* ; Prof. dr. ing. *Ion Popescu* ; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș* ; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca* ; Prof. dr. ing *George Rulea* ; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru* ; Prof. dr. *Octavian Stănășilă* ; Prof. dr. docent *Ion Teoreanu* ; Prof. dr. docent *Andrei Țugulea* ; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu* ; Prof. dr. docent *Rodica Vîlcu* ; Academician *Radu Voinea*.

Editor : Institutul Politehnic București
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ROMPRESFILATELIA, Import export press, P.O. Box 12-201, Telex 10378, Calea Griviței 62—64, Bucharest, ROMANIA

Sumar

C. Stănăşilă, O. Stănăşilă

Instalaţie energetică eoliană 3

L. Pascu

Asupra metodei Graeffe Lobacevski de rezolvare a ecuaţiilor algebrice 11

V. A. Popescu, I. M. Popescu

Aplicarea succesivă a perturbaţiilor la un oscilator armonic liniar 19

V. Drobotă

Calculul tensiunilor şi deplasărilor unghiulare ale arborilor cu discuri ataşate (volanţi) supuşi la răsucire prin şoc 25

N. Constantin, M. Blumenfeld

Metoda de simulare a contactului între suprafeţele a două corpuri elastice cu ajutorul metodei elementelor finite (l. engleză) 39

V. Stanciu

Asupra unei metode de calcul a caracteristicii de lucru a motoarelor turboreactoare simplu flux, birotoare 47

I. Stiharu, C. Bungetzianu, Carmen Alexe, C. Vasiliu

Algoritm de calcul în timp real al comenzilor pentru urmărirea unei traiectorii definite în timp 57

Al. Marinescu, Şt. Staicu

Manevre optime ale vehiculelor spaţiale în apropierea punctelor de libraţie 69

A. Stoica

Sistem optimal de conducere a zborului în zona aeroportului 81

I. Cristea

Consideraţii privind optimizarea planificării duratei de transport a mărfurilor în condiţiile apariţiei unor fluctuaţii sezoniere atît la expeditori, cît şi la destinatari 91

H. Gheorghiu, Lucia Fetcu

Tensiuni în recipiente toroidale cu secţiune ovalizată solicitate cu presiune interioară 97

1509

EGYETEM 1848

Summary

C. Stănăşilă, O. Stănăşilă

A Power Wind Energetical Installation 3

L. Pascu

On the Graeffe Lobacevski Method for Solving Algebraic Equations 11

V. A. Popescu, I. M. Popescu

Successive Application of Perturbations to a Linear Harmonic Oscillator 19

V. Drobotă

Calculations of Stresses and Angular Displacements of Shafts with Attached Disks Loaded to Torsion by Shocks 25

N. Constantin, M. Blumenfeld

A Method for the Simulation of the Contact between the Surfaces of Two Elastic Bodies by the Finite Element Method 39

V. Stanciu

On a Method of Calculation of the Operating Line with a Two-Spool Turbojet Engine 47

I. Stiharu, C. Bungetzianu, Carmen Alexe, C. Vasiliu

On Line Computation of Control for Precision Tracking in 4 D 57

A. Marinescu, Şt. Staicu

Optimal Maneuvers of Space Vehicles Near the Libration Points 69

A. Stoica

Optimal Guidance for Aircraft on the Terminal Area 81

I. Cristea

Considerations on Optimization of the Planning of the Term of Merchandises . . . 91

H. Gheorghiu, Lucia Fetcu

Stresses in Ovalised Toroidal Tubes with Variable Thickness Walls Submitted to Internal Pressure 97

C.Z.:621.411.24.001.1.

INSTALAȚIE ENERGETICĂ EOLIANĂ

C. STĂNĂȘILĂ, O. STĂNĂȘILĂ*

În lucrare se prezintă o propunere de realizare a unei instalații simple și ieftine, care să valorifice energia vîntului de la înălțimi mai mari decît cele acceptabile tehnico-economic în cazul instalațiilor montate pe stîlpi.

Conversia controlată a energiei cinetice a vîntului în energie mecanică, practicată de cîteva milenii la propulsia navelor și extinsă apoi la antrenarea morilor de vînt din secolele trecute, participă într-o măsură neînsemnată la satisfacerea nevoilor de energie ale omenirii. Noua conjunctură energetică a impulsionat interesul pentru energia eoliană. Puternica bază teoretică și practică a aeronauticii și în general a tehnicii actuale oferă perspective noi pentru valorificarea competitivă a energiei vîntului, prin soluții care să-i atenueze dezavantajele (dispersarea și fluctuațiile aleatoare între valori nesatisfăcător de mici și periculos de mari), în raport cu avantajele (gratuitatea, abundența și disponibilitatea).

Cele mai multe din numeroasele brevete de invenție acordate în ultimul deceniu vizează instalațiile cu rotoare de diferite forme și mărimi, montate pe stîlpi verticali, cu înălțimi pînă la 120 m; în țările dezvoltate s-au realizat instalații de acest tip cu puteri nominale pînă la 5 MW pentru viteza v a vîntului de 15 m/s, cu un randament de conversie de circa 25% (raportat la $S\rho v^3/2$, ρ fiind densitatea aerului).

Viteza vîntului variază cu înălțimea h după relația aproximativă

$$v_h = v_{10}\left(\frac{h}{10}\right)^{(0,10\ldots0,40)}$$

înrudită cu „legea 1/7" din mecanica fluidelor, în care v_{10} este viteza la înălțimea de 10 m; puterea P dezvoltată de o instalație satisface deci relația

$$P_h = P_{10}\left(\frac{h}{10}\right)^{(0,30\ldots1,20)}$$

---

* Cercet. dr. ing., I.C.P.M.C.; Prof. dr., catedra Matematici II

O astfel de evoluţie cu h justifică ridicarea captatoarelor de energie eoliană la înălţimi cît mai mari, limitate îndeosebi de cheltuielile de investiţii, repede crescătoare cu înălţimea stîlpilor respectivi, solicitaţi orizontal la vîrf, de o forţă minimă $P/\eta v$, care determină un moment de încovoiere la bază de cel puţin $Ph/\eta v$ (peste 40 MNm, pentru stîlpul de 120 m al unei instalaţii cu turbină cu ax orizontal, care furnizează 5 MW cînd v=15 m/s). Un cablu solicitat la întindere de o aceeaşi forţă ar necesita o investiţie de multe ori mai mică decît stîlpul, chiar dacă lungimea sa ar depăşi de multe ori înălţimea h astfel încît prezintă un interes major o instalaţie energetică eoliană care să funcţioneze la o înălţime cît mai mare, legată de sol numai prin cabluri. Asemenea soluţii de început pot fi exemplificate prin :

— turbine de vînt, cuplate cu generatoare electrice, montate pe planoare captive, telecomandate, legate la sol prin cabluri electrice şi de tracţiune ;

— baloane cu densităţi medii mai mici decît a aerului, dotate cu nervuri exterioare curbate elicoidal, prin intermediul cărora sînt rotite de vînt, cablul pe care sînt înşirate este torsionat şi transmite la sol puterea captată de la vînt ;

— un zmeu cu suprafaţă mare, legat printr-un cablu de o navă pe care o antrenează pe orice direcţie care face un unghi sub 90° cu direcţia vîntului.

Prezentăm în continuare o propunere de realizare a unei instalaţii relativ simple, robuste, eficiente şi deosebit de ieftine, care să valorifice energia vîntului de la înălţimi mult mai mari decît cele maxime acceptabile tehnico-economic în cazul instalaţiilor montate pe stîlpi, cu puteri care pot depăşi chiar şi 5 MW cînd $v_{10} \geq 10$ m/s.

Un cerc 1 din profile de aluminiu, cu diametru între cîţiva metri şi cîteva sute de metri, se rigidizează cu două ansambluri de spiţe 2 (ca roata de bicicletă ; în schiţă spiţele sînt redate schematic), dispuse fiecare pe suprafaţa laterală a cîte unui con cu vîrful în cîte unul din capetele unui ax 3, perpendicular pe planul cercului 1 (v. figura 1). Pe faţa laterală interioară a unuia din conuri se aşează o folie 4.

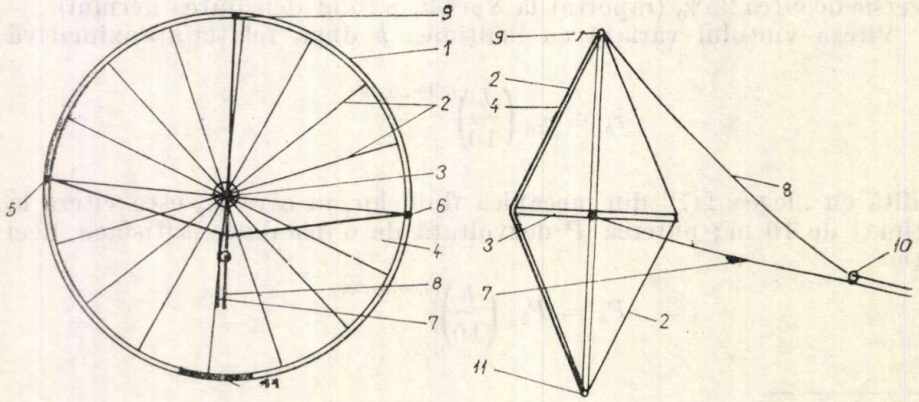


Fig. 1

De două puncte diametral opuse 5 și 6 se leagă un cablu de tracțiune 7 (bifurcat către punctele 5 și 6); un alt cablu 8, legat de un punct 9 de pe cercul 1, este trecut printr-un inel 10 prins de cablul 7. În punctul diametral opus 9 pe cercul 1, se concentrează o masă 11. Cablurile 7 și 8 fac legătura dintre „zmeul" prezentat și o stație 12, prevăzută la partea sa superioară cu un mare inel 13 care susține zmeul în perioadele în care nu funcționează (de exemplu, cînd viteza vîntului la înălțimea de 10 m coboară sub 2,0 m/s); în vederea lansării zmeului, inelul 13 poate fi rotit

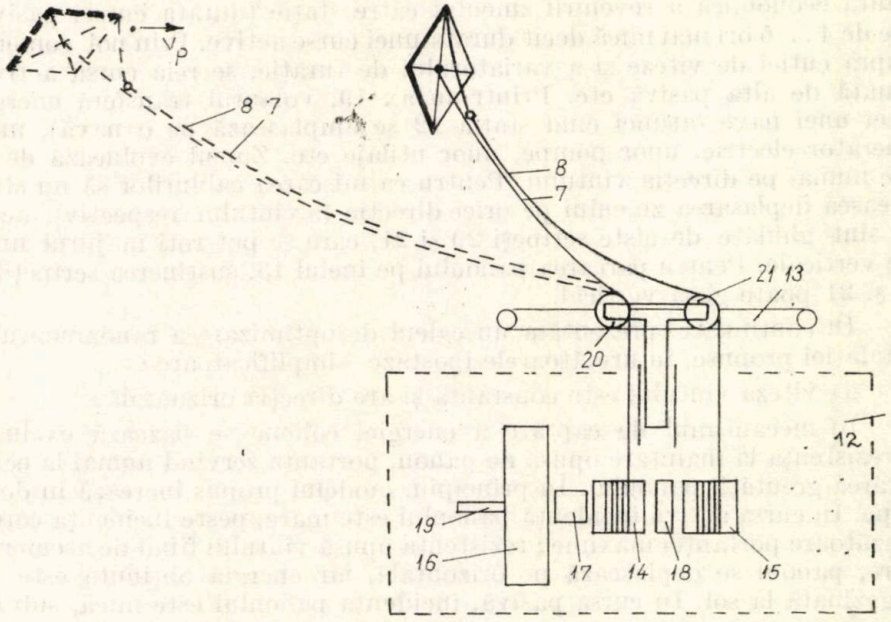


Fig. 2

în jurul unui ax vertical și înclinat pînă la 35° față de orizontală, asigurînd astfel orientarea diametrului punctului 9 al zmeului pe direcția vîntului, cu punctul 9 contra vîntului și ridicat la cotă maximă; o viteză de 3 m/s este suficientă pentru ridicarea zmeului, a cărei masă specifică nu depășește 0,6 kg/m². Viteza vîntului crescînd cu înălțimea, zmeul urcă din ce în ce mai repede, antrenînd accelerat și cablurile 7 și 8. Cu zmeul înclinat la circa 35° față de orizontală, tracțiunea în cabluri este maximă și are o pantă ușor supraunitară. Cînd zmeul ajunge la o înălțime convenabilă (pentru insta'ații mari, sute de metri), cablurile 7 și 8 sînt puternic tensionate; lăsînd zmeul să urce (oblic) cu o viteză v_a cît circa 0,3 din viteza v a vîntului, tensiunile se reduc întrucîtva, dar produc lucru mecanic, prin derularea lor de pe niște tamburi 14 și 15 din stația 12. Schița din figura 2 nu respectă proporțiile; în raport cu stația 12, panoul este redat mult mai mic. Tamburii întrețin turația unui volant 16, prin intermediul unei cutii de viteze 17, care adaptează turația variabilă a tamburilor (a căror viteză periferică tangențială v_a variază cu viteza vîntului) la turația aproape constantă a volantului. Un variator de tura-

ţie 18 asigură o mică reducere sau creştere a vitezei unghiulare a tamburului 13 în raport cu cea a tamburului 14, pentru modificarea înclinării panoului (zmeului). Cînd derularea cablurilor se apropie de încheiere, prin variatorul 18 se comandă reducerea unghiului de înclinare a panoului (devine negativ); tracţiunea în cabluri se reduce la mai puţin de o zecime din valoarea pe care a avut-o în cursa activă a zmeului; acţionînd cutia de viteze, cu o mică parte din energia acumulată de volant în timpul cursei active (sub 5...10%), se asigură rebobinarea cablurilor pe tamburii respectivi, cu modulul vitezei tangenţiale v_p apropiat de cel al vitezei vîntului; durata economică a revenirii zmeului către staţie (durata cursei pasive) este de 4...5 ori mai mică decît durata unei curse active. Prin noi comenzi asupra cutiei de viteze şi a variatorului de turaţie, se reia cursa activă, urmată de alta pasivă etc. Printr-un ax 19, volantul transferă energia elicei unei nave (atunci cînd staţia 12 se amplasează pe o navă), unui generator electric, unor pompe, unor utilaje etc. Zmeul evoluează de la sine numai pe direcţia vîntului. Pentru ca mişcarea cablurilor să nu stînjenească deplasarea zmeului pe orice direcţie (a vîntului respectiv), acestea sînt ghidate de nişte scripeţi 20 şi 21, care se pot roti în jurul unor axe verticale. Pentru parcarea panoului pe inelul 13, susţinerea scripeţilor 20 şi 21 poate glisa vertical.

În continuare, prezentăm un calcul de optimizare a randamentului instalaţiei propuse, în următoarele ipostaze simplificatoare:

a) viteza vîntului este constantă şi are direcţia orizontală;

b) mecanismul de captare a energiei eoliene se bazează exclusiv pe rezistenţa la înaintare opusă de panou, portanţa servind numai la echilibrarea greutăţii panoului. În principiu. modelul propus lucrează în două etape. În cursa activă incidenţa panoului este mare, peste incidenţa corespunzătoare portanţei maxime; rezistenţa opusă vîntului fiind de asemenea mare, panoul se deplasează pe orizontală, iar energia obţinută este înmagazinată la sol. În cursa pasivă, incidenţa panoului este mică, sub incidenţa corespunzătoare portanţei maxime. Ca urmare, rezistenţa la înaintare este mai mică şi panoul poate fi readus la poziţia iniţială cheltuind numai o parte din energia înmagazinată în cursa activă.

În condiţiile precizate, randamentul de captare este mai mic decît cel al elicelor care funcţionează continuu (fără cursă pasivă) şi totodată pe principiul portanţei. Se ştie că cele mai perfecţionate elice eoliene captează pînă la 60—70% din „limita Betz" adică 50—60% din puterea vanei de aer corespunzătoare proiecţiei suprafeţei discului elicei pe normala la curent, [1]. În cazul modelului propus, randamentul este mai mic, dat fiind că pe cursa pasivă nu numai că nu se produce, ci chiar se consumă energie. Totuşi simplitatea şi ieftinătatea instalaţiei propuse o fac deosebit de competitivă, chiar dacă ar avea randamente de cîteva ori mai mici decît ale elicelor eoliene.

Să notăm viteza vîntului cu v (în raport cu solul), viteza panoului cu v_a la îndepărtarea de staţie (faza activă) şi cu v_p viteza la apropiere (faza pasivă). Vitezele v_a şi v_p au aceeaşi direcţie cu v pentru funcţionarea la regim normal a instalaţiei. Notăm aria panoului cu S şi coeficienţii de rezistenţă la înaintare prin aer cu c_a, c_p în cele două faze; punem $f = c_p/c_a$ deci $0 < f < 1$.

Presupunînd viteza vîntului constantă, nu neapărat orientată orizontal și notînd cu ρ densitatea aerului, rezistențele R_a și R_p la înaintare pe cele două faze ale ciclului sînt orientate după direcția vitezei v și în regim nominal expresiile modulelor lor sînt

$$R_a = \frac{S \cdot c_a \cdot \rho(v - v_a)^2}{2}, \quad R_p = \frac{S \cdot c_p \cdot \rho(v + v_p)^2}{2} \tag{1}$$

(Pentru simplificare am considerat că deplasarea panoului se face orizontal cu viteze constante v_a, v_p pe cele două faze ale ciclului; presupunem de asemenea că greutatea G este echilibrată în orice moment de portanța F_p).

Durata t_c a unui ciclu va fi atunci $t_c = \frac{L}{v_a} + \frac{L}{v_p}$, unde L este cursa panoului. Energia produsă în cursul unui ciclu (presupunînd mărimile R_a, R_p constante), va fi $(R_a - R_p) \cdot L$ și pentru un interval de funcționare T dat, energia produsă va fi $(R_a - R_p) \cdot \frac{T}{t_c} = T \cdot (R_a - R_p) \cdot \frac{v_a v_p}{v_a + v_p}$. Puterea medie este

$$P = (R_a - R_p)\frac{v_a v_p}{v_a + v_p} = \frac{S c_a v^3}{2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{v_a}{v}\right)^2 - f\left(1 + \frac{v_p}{v}\right)^2}{\frac{v}{v_a} + \frac{v}{v_p}}.$$

Notînd $x = \frac{v_a}{v}$, $y = \frac{v_p}{v}$ deci $0 < x < 1$, $y > 0$, maximul lui P este atins o dată cu maximul funcției $F(x, y) = \frac{(1 - x)^2 - f(1 + y)^2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$. Punînd condițiile necesare $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ și notînd $p = \frac{x - 1}{x}$, $q = \frac{y + 1}{y}$, rezultă $p < 0$, $q > 1$ și condițiile necesare de extrem

$$f = \frac{(q + 1)(q - 1)^3}{q(q + 2)^3}, \quad p + q + 1 = 0. \tag{2}$$

Variația cu incidența $i°$ a coeficientului aerodinamic de portanță d și de rezistență la înaintare c pentru o placă pătrată de 0,25 × 0,25 m², precum și graficele corespunzătoare, obținute printr-un experiment, în tunelul aerodinamic, condus de prof. dr. ing. C. Berbente, au fost redate în lucrarea [2]; valoarea optimă minimă a lui f a fost, în cazul studiat, de 0,07.

În perioada activă a ciclului incidențele sînt mari, corespunzînd porțiunii din dreapta a lui d maxim. Valoarea incidenței este determinată de condiția ca portanța să echilibreze greutatea G a panoului și cablurilor.

În cazul cînd viteza vîntului este orizontală, din condiţia de echilibru rezultă două relaţii :

$$G = \frac{\rho}{2}(v - v_a)^2 \cdot S \cdot d_a = \frac{\rho}{2}(v + v_p)^2 \cdot S \cdot d_p \qquad (3)$$

În practică se impun v şi raportul $\frac{G}{S}$ şi rămîn nedeterminate incidenţele i_a, i_p ale panoului şi vitezele v_a, v_p deci patru parametri. Dispunem însă tot de patru ecuaţii (2) şi (3), astfel că problema este complet determinată. Deoarece d_a, d_p ca funcţii de i_a şi c_a, c_p ca funcţii de i_p au valori uşor de interpolat, se calculează valorile optimale :

$$\frac{v_a}{v} = 1 - \frac{1}{\lambda\sqrt{d_a}} \quad \text{şi} \quad \frac{v_p}{v} = \frac{1}{\lambda\sqrt{d_p}} - 1, \quad \text{unde} \quad \lambda = \left(\frac{\rho v^2 S}{2G}\right)^{1/2}.$$

Cu datele experimentale obţinute pentru placa pătrată cu latura de numai 25 cm, dăm următorul exemplu : pentru $v = 8{,}06$ m/s şi $\frac{G}{S} = 5$ N/m², rezultă $\lambda = 2{,}827$, $i_a = 81°$, $d_a = 0{,}200$, $c_a = 1{,}25$; $i_p = 1{,}13°$, $d_p = 0{,}088$, $c_p = 0{,}0514$; $\frac{v}{v_a} = 0{,}209$; $\frac{v_p}{v} = 0{,}561$; $f = 0{,}07$; $P/\left(\frac{\rho v^3 S}{2} c_a\right) = 0{,}0693$ şi $P/S = 27{,}84$ W/m². În aceste condiţii 8,6% din puterea curentului de aer care are secţiunea egală cu aria panoului este recuperată de instalaţie $\left(P/\frac{\rho v^3 S}{2} = 0{,}086\right)$. Acest procentaj se îmbunătăţeşte dacă f scade, iar c_a creşte. Deoarece coeficientul c_a este datorat mai ales firelor de prindere, o cale practică este creşterea lui c_a prin utilizarea unor panouri mari, concave. Pentru $c_a = 2{,}18$ şi $f = 0{,}04$ de exemplu, se obţine un coeficient dublu de transformare $\left(P/\frac{\rho v^3 S}{2} = 0{,}180\right)$. În cazul real, al evoluţiei panoului pe o suprafaţă apropiată de cea a unui con cu unghiul la vîrf de circa 45°, randamentul va depăşi 25%.

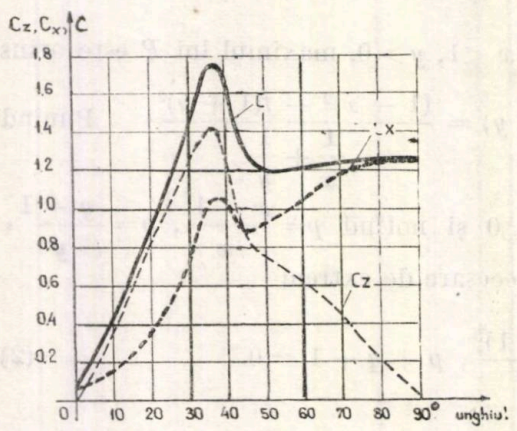


Fig. 3

Un panou (zmeu) cu diametrul de 100 m, care evoluează la o înălţime medie de 500 m (cu lungimea cablurilor de 1 km), poate furniza 5000 kW, presupunînd viteza vîntului la înălţimea de 10 m de numai 7,5 m/s (pu-

terea se dublează — 10 MW, dacă $v_{10} = 9{,}5$ m/s). Cea mai sofisticată elice cu același diametru, amplasată pe un stîlp de 120 m, funcționînd cu un randament dublu, de 50%, maxim realizat pînă astăzi, ar furniza 4600 kW și ar necesita investiții de cel puțin 10 ori mai mari decît instalația propusă.

Ne exprimăm speranța de a vedea valorificată propunerea noastră în cîteva prime instalații de mare putere, integral automatizate și computerizate, pentru antrenarea de nave sau pentru producerea de energie electrică. etc. Evoluția unor astfel de panouri la mari înălțimi nu constituie un impediment insurmontabil pentru aviație.

BIBLIOGRAFIE

1. *D. Le Gourières*, Energie éolienne, Ed. Eyrolles, Paris, 1980.
2. *C. Stănășilă, C. Berbente, O. Stănășilă*, Considerații asupra unui model de instalație energetică eoliană, Buletinul I.P.B., Seria Mecanică, tom. XLIV, 3, Buc., 1982.

A Power Wind Energetical Installation

In the paper one proposes a simple, cheap power wind installation, which makes use of the wind energy from a height greater than the technico-economically height accepted for the actual installations set on pillars.

C.Z.: 512.64
511.5

ASUPRA METODEI GRAEFFE LOBACEVSKI DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR ALGEBRICE

L. PASCU *

Metoda Graeffe-Lobacevski permite separarea rădăcinilor ecuațiilor algebrice. Autorul propune un criteriu similar de separare bazat pe analiza ordinului de mărime al coeficienților ecuației inițiale. Procedura este prezentată în detaliu și este însoțită de un exemplu de calcul.

1. Introducere

Metoda Graeffe Lobacevski permite, prin separarea rădăcinilor cu ajutorul ridicărilor succesive la pătrat, rezolvarea simplă și precisă a unui mare număr de ecuații.

Plecînd de la același principiu, lucrarea de față își propune prezentarea unui algoritm general de rezolvare a ecuațiilor algebrice cu coeficienți reali.

2. Considerații preliminare

Înaintea prezentării algoritmului de rezolvare, sînt necesare cîteva precizări privind elementele acestuia.

2.1. *Adimensionalizarea ecuațiilor*

Fie ecuația $P(x) = 0$, cu $P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$, $c_i \in R$, $c_0 \neq 0$ și fie $x_i \in c$, $i = \overline{1, n}$, rădăcinile ei. Putem construi ușor ecuația avînd ca rădăcini numerele complexe $x_i/\sqrt[n]{|c_0|}$, cu termenul liber egal cu 1. Numim această ecuație ecuația adimensională corespunzătoare ecuației date.

2.2. *Ecuații adimensionale reciproce*

Propoziția dată mai jos relativă la ecuațiile adimensionale reciproce de grad par, permite determinarea rădăcinilor ce alcătuiesc grupe de module egale sau foarte apropiate, în acest din urmă caz determinarea fiind mai puțin precisă.

* Student, fac. Aeronave

Propoziţie :

a) Necesar şi suficient ca o ecuaţie adimensională de grad par, egal cu $2n$ ($n \in N$, $n > 1$), să fie reciprocă este ca ea să admită o descompunere de forma :

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x^2 - 2\alpha_i x + 1) = 0 \quad \text{cu} \quad \alpha_i \in C \quad i = 1 \ldots n \qquad [1]$$

b) Dacă $P(x) = x^{2n} + b_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + b_1 x + 1$, atunci au loc relaţiile :

$$\sum_{k=0}^{j} C_{n-k}^{\frac{j-k}{2}} 2^k \sum_{(i_1 \cdots i_k)} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} = b_j = b_{2n-j}; \quad j = 1 \ldots n \qquad [2]$$

cu următoarele convenţii :

$$C_n^q = 0 \text{ pentru } q \notin N \quad \text{şi} \quad C_0^0 = 1$$

$\sum_{(i_1 \cdots i_k)} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}$ reprezintă suma tuturor produselor de k dintre cele n numere complexe $\alpha_1 \ldots \alpha_n$; pentru $k = 0$ vom lua prin convenţie :

$$\sum_{(i_1 \cdots i_k)} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} = 1 \qquad [4]$$

În ce priveşte a), suficienţa este evidentă. Pentru necesitate să considerăm o rădăcină x_0 a ecuaţiei ; în virtutea reciprocităţii acesteia, ea va admite ca rădăcină şi pe $1/x_0$, avînd deci ca divizor pe $(x - x_0)(x - 1/x_0) = x^2 - (x_0 + 1/x_0)x + 1$. Cîtul fiind tot un polinom reciproc raţionamentul poate fi reluat identic pînă cînd cîtul devine un trinom de gradul II, obţinîndu-se descompunerea din enunţ. Punctul b) poate fi demonstrat prin inducţie.

Observaţii : 1) Orice ecuaţie reciprocă de grad impar admite ca rădăcină pe $+1$ sau -1 ; după efectuarea împărţirii corespunzătoare cîtul este o ecuaţie reciprocă de grad par pe care o putem trata folosind rezultatele propoziţiei enunţate.

2) Relaţiile [2] permit rezolvarea ecuaţiilor reciproce de grad $2n$ prin rezolvarea succesivă a unui sistem de ecuaţii liniare, a unei ecuaţii algebrice de grad n şi a n ecuaţii de gradul II.

2.3. *Separarea rădăcinilor*

Vom propune în acest paragraf un criteriu de separare bazat pe analiza ordinelor de mărime ale coeficienţilor ecuaţiei, permiţînd despărţirea ecuaţiei iniţiale în două sau mai multe ecuaţii a căror rezolvare continuă separat.

Numim ordin de mărime al numărului real a numărul întreg, notat $[a]$ cel mai apropiat de $\lg |a|$.

Pentru a pune în evidență principiul separării, vom analiza pentru început un caz simplu.

Fie numerele complexe x_i; $x_i \neq 0\ (\forall)\ i = 1 \ldots p$, y_j; $y_j \neq 0$ $(\forall) j = 1 \ldots r$; $p, r \in N$; $p, r > 1$, pe care le presupunem rădăcini ale unei ecuații adimensionale. Notînd :

$$x = \left(\prod_{i=1}^{p} |x_i| \right)^{1/p}$$

$$y = \left(\prod_{j=1}^{r} |y_j| \right)^{1/r} \quad ; \quad x, y \in R^+ \qquad [5]$$

putem pune numerele x_i, respectiv y_i sub forma :

$$x_i = xk_i \quad i = 1 \ldots p$$

$$y_j = yq_j \quad j = 1 \ldots r \text{ unde } k_i, q_j \in C \qquad [6]$$

Vom presupune acum că $x >> y$, iar k_i și q_j au module de ordinul de mărime al unității; notînd $\varepsilon = y/x$ coeficienții ecuației rezultă sub forma :

$$\begin{aligned}
&b_{p+r} = 1 \\
&b_{p+r-1} = x \sum_{(i_1)} k_{i_1} + x \cdot 0(\varepsilon) \\
&b_{p+r-2} = x^2 \sum_{(i_1, i)} k_{i_1} k_{i_2} + x^2 \cdot 0(\varepsilon) \\
&\quad \vdots \\
&b_{r+1} = x^{p-1} \sum_{(i_1 \cdots i_{p-1})} k_{i_1} \ldots k_{i_{p-1}} + x^{p-1} 0(\varepsilon) \qquad [7] \\
&b_r = x^p k_1 \ldots k_p + xP \cdot 0(\varepsilon) \\
&b_{r-1} = x^p k_1 \ldots h_p y \sum_{(j_1)} qj_1 + x\ y \cdot 0(\varepsilon) \\
&\quad \vdots \\
&b_1 = x^p k_1 \ldots k_p y^{r-1} \sum_{(j_1 \cdots j_{r-1})} q_{j_1} \ldots q_{j_{r-1}} + x\ y^{r-1} \cdot 0(\varepsilon) \\
&b_0 = x^p k_1 \ldots k_p y^r q_1 \ldots q_r = 1
\end{aligned}$$

relații în care a fost păstrată convenția anterioară privitoare la sume; indicii „i" variază între 1 și p iar „j" între 1 și r; $0(\varepsilon)$ reprezintă o cantitate mică de ordinul lui ε. Să presupunem ținînd seama de ipotezele adoptate,

că şirul ordinelor de mărime a coeficienţilor ecuaţiei poate fi pus sub forma :

$$\begin{aligned}
&[b_{p+r}] = 0 \\
&[b_{p+r-1}] \simeq [x] \\
&[b_{p+r-2}] \simeq [x^2] \\
&[b_{r+1}] \simeq [x^{p-1}] \\
&[b_r] = [x^p] \\
&[b_{r+1}] \simeq [x^p y] \\
&\quad\vdots \\
&[b_1] \simeq [x^p y^{r-1}] \\
&[b_0] = [x^p y^r] = 0
\end{aligned} \qquad [8]$$

Să calculăm acum expresiile $\beta_1 = -[b_{1+1}] + 2[b_1] - [b_{1-1}]$ pentru $1 = 1 \ldots p + r - 1$. Folosind relaţiile [8] şi ţinînd seama de definiţia ordinului de mărime, dată mai sus, vom obţine :

$$|\beta_1| \leqslant 2 \text{ pentru } 1 = 1 \ldots r - 1,\ r + 1 \ldots p + r - 1 \qquad [9]$$

$$|\beta_1 - [x/y]| \leqslant 2 \text{ pentru } 1 = r$$

Cum $y \ll x$, putem considera valoarea 2 nesemnificativă în raport cu $[x/y]$ şi deci putem scrie :

$$\beta_1 \simeq 0 \text{ pentru } 1 = 1 \ldots r - 1,\ r + 1 \ldots p + r - 1 \qquad [10]$$

$$\beta_1 \simeq [x/y] = [1/\varepsilon] \text{ pentru } 1 = r$$

Punctul $1 = r$, pentru care $\beta_1 \simeq [1/\varepsilon] \gg 0$ este punctul de separare al ecuaţiei analizate. Într-adevăr, analizînd relaţiile [7], observăm că coeficienţii $b_{p+r} \ldots b_r$, reprezintă, în cadrul unei aproximaţii de ordinul lui ε, coeficienţii ecuaţiei avînd ca rădăcini pe $x_1 \ldots x_p$, iar $b_r \ldots b_0$ cei ai unei ecuaţii cu rădăcini $y_1 \ldots y_r$, în cadrul aceleiaşi aproximaţii. În plus, β_r este o măsură a erorii introduse prin separare.

În general pot exista mai multe puncte de separare, fără ca aceasta să altereze în principiu cele expuse mai sus. Rezultă deci următorul :

Criteriul de separare al ordinelor de mărime : constituie punct de separare al ecuaţiei date punctul 1 pentru care $\beta_1 = -[b_{1+1}] + 2[b_1] - -[b_{1-1}] > \beta_0$, unde β_0 este o valoare naturală, impusă în raport cu precizia dorită în determinarea rădăcinilor.

Observaţie : Există situaţii în care aproximaţiile în cadrul cărora au fost scrise relaţiile [8] nu mai sînt valabile, chiar în cadrul ipotezelor asumate, întrucît una sau mai multe din sumele $\sum_{(i_1 \ldots i_m)} k_{i_1} \ldots k_{i_m}$ sau $\sum_{(j_1 \ldots j_m)} q_{j_1} \ldots q_{j_m}$ pot lua valori foarte aproape de 0, afectînd puternic ordinul de mărime al termenului respectiv ; în aceste situaţii β_1 corespunzător lui va fi negativ ;

vom modifica ordinele de mărime $[b_1]$ pentru care $\beta_1 < 0$ în așa fel încît să înlocuim toate valorile β_1 negative cu valori nule sau pozitive minime, după care putem aplica criteriul de separare; fără aceste precauțiuni rezultatele obținute pot fi false.

2.4. *Determinarea argumentelor rădăcinilor*

Determinarea argumentelor poate fi efectuată după determinarea modulelor rădăcinilor. Pentru rădăcinile reale, argumentul poate fi 0 sau π iar determinarea se face prin încercări.

Rădăcinile complexe sînt puse în evidență, în cadrul acestui algoritm, odată cu rezolvarea unora dintre ecuațiile de gradul II care apar fie din procesul de separare, fie ca urmare a rezolvării unei ecuații reciproce. Dacă acest lucru se produce în urma a k ridicări la pătrat, atunci dispunem de puterea 2^k a rădăcinii căutate și deci, în ce privește argumentul, de o relație de forma:

$$\cos 2^k\varphi = a \qquad \text{unde } a \in [-1,1] \qquad [11]$$

în plus, argumentul determinat trebuie să verifice ecuația inițială. Din [11] deducem:

$$\varphi = \pm 2^{-k} \cos a + 21\ \pi/2^k \quad 1 = 0, 1 \ldots 2^k - 1 \qquad [12]$$

sau, întrucît ecuația admite și rădăcina complex conjugată, de argument $-\varphi$ putem considera doar valorile:

$$\varphi = 2^{-k} \arccos a + 21\ \pi/2^k \quad 1 = 0, 1 \ldots 2^k - 1 \qquad [13]$$

care vor trebui testate pe rînd; cea care verifică este argumentul căutat.

3. Prezentarea algoritmului

1) Separarea rădăcinilor nule, cu reducerea corespunzătoare a gradului ecuației.

2) Dacă ecuația este de gradul I sau II se rezolvă direct; stop.

3) Aducere la polinom monic și adimensionalizare (v. § 2.1.)

4) Dacă ecuația este reciprocă se merge la 10).

5) Detectarea punctelor de separare (§.2.3); dacă există cel puțin unul se merge la 7).

6) Ridicare la pătrat, se reia de la 5).

7) Reluarea algoritmului, de la 1), pentru fiecare din ecuațiile rezultate în urma separării.

8) Determinarea modulelor rădăcinilor ecuației adimensionalizate, prin extragerea rădăcinilor pătrate corespunzătoare ridicărilor la pătrat efectuate la 6)

9) Determinarea argumentelor rădăcinilor (§ 2.4); se merge la 13).

10) Rezolvarea sistemului [2], liniar în necunoscutele $\sum_{(i_1 \ldots i_k)} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}$, $k = 1 \ldots n$.

11) Reluarea algoritmului, de la 1), pentru ecuația cu rădăcini α.
12) Rezolvarea celor n ecuații $x^2 - 2\alpha_i x + 1 = 0$, $i = 1, n$.
13) Revenire asupra adimensionalizării (înmulțirea rădăcinilor deduse cu $\sqrt[n]{|c_0|}$ (§ 2.1); stop.

Algoritmul este recursiv; rezolvarea se consideră încheiată odată cu închiderea tuturor apelurilor generate pe parcurs, prin punctele 7) și 11), cît și a apelului inițial. Punctul 9) este opțional în toate apelurile auxiliare, fiind însă obligatoriu în apelul inițial, în acest caz trebuie considerate toate ridicările la pătrat suferite de rădăcina respectivă, de la pornire pînă în momentul punerii ei în evidență; de asemeni saltul la 13 este executat indiferent dacă 9) este executat sau nu.

4. Exemplu de calcul

Considerăm ecuația (dată prin coeficienții săi, în ordinea descrescătoare a puterilor lui x)

1 — 15.01 103.11 —385.59 697.49 —401

Apel inițial (nivel 0):

— adimensionalizare

c_i: 1 4.526 9.377 10.574 5.768 1

— nu este reciprocă

— șirul $(\beta_1)1 = 4 \ldots 1 : 1, 0, 0, 1$ nu sînt puncte de separare (am luat $\beta_0 = 7$)

— ridicare la pătrat

c_i: 1 1.733 3.732 12.695 12.121 1

— șirul (β_1): —1, 1, 0,1; considerăm nesemnificativă valoarea —1.

— ridicare la pătrat

c_i: 1 —4.453 —5.887 74.169 121.54 1

— șirul $(_1)$: 1, —1, 1, 2

— ridicare la pătrat

c_i: 1 31.599 938.22 6.923E03 1.462E04 1

— șirul (β_1): —1, 1, 1, 4

— ridicare la pătrat

c_i: 1 —877.9 4.720E05 2.049E07 2.138E08 1

— șirul (β_1): 0,2,0,9 avem separare în punctul 1 = 1, rezultă două ecuații de rezolvat:

Apel recursiv (nivel 1):

— ecuație dată:

c_i: 1 —877.9 4.720E05 2.049E07 2.138E08

— adimensionalizare

c_i: 1 —7,26 32.277 11.587 1

— nu sînt puncte de separare; ridicăm la pătrat pînă apar:

c_i: 1 —11.841 1212.1 69.700 1

c_i: 1 —2.284E03 1.471E06 2.433E03 1

c_i: 1 —2.275E06 2.163E12 2.982E06 1

— punct de separare în poziția 2 (2.163E12) rezultă 2 noi ecuații de rezolvat.

Apel recursiv (nivel 2) :
— ecuație dată
c_i : 12.275E06 2.163E12
— ecuație de gradul doi, modulul rădăcinilor complexe : 1.471E06 ; argumentul dat de cos $2^7\varphi = 0.5 \times 1.547 = 0.774$. stop.
Apel recursiv (nivel 2)
— ecuație dată :
c_i : 2.163E12 2.982E06 1
— ecuație de gradul doi, două rădăcini reale : 5.76E—07 ;8.03E—07 stop.
— extragerea rădăcinii pătrate de 3 ori din modulele rădăcinilor determinate : $(1.471E06)^{1/8} = 5.901$; $(8.03E - 07)^{1/8} = 0.173$; $(5.76E - 07)^{1/8} = 0.166$
— revenirea asupra adimensionalizării : modulele devin, înmulțite cu $(2.138E08)^{1/4} = 120.9 : 713.6$; 20.92 ; 20.07 stop.
Apel recursiv (nivel 1) :
— ecuație dată :
c_i : 2.138E08 1
— ecuație de gradul 1, rădăcină 4.677E—08 stop.
— extragerea rădăcinii pătrate de 4 ori din toate modulele rădăcinilor determinate ; rezultă : 1.508 ; 1.209 ; 1.206 ; 0.301.
— determinarea argumentelor : pentru modulul 1.508, din relația $\cos 2^7\varphi = 0.774$ rezultă $\varphi = 0.3069 + 1\pi/64$ $1 = 0,1, \ldots 127$; verifică $\varphi = 306.87°$; pentru celelalte rezultă $\varphi = 0$ (rădăcini reale pozitive).
— revenirea asupra adimensionalizării : rezultă următoarele rădăcini : $3 \pm 4.0000003i$; 4.0101949 ; 3.99998052 ; 1.0000001 (lucrul a fost efectuat cu toate zecimalele disponibile, dar nu au fost trecute în întregime pe parcursul prezentării pentru a nu încărca excesiv).
Rădăcinile corecte ale ecuației sînt : $3 \pm 4i$; 4 ; 4.01 ; 1.

On the Graeffe Lobacevski Method for Solving Algebraic Equations

The Graeffe-Lobacevski method permits the separation of the roots of the algebraic equations. The author proposes a similar criterion of separation, based on the analysis of the values of the initial coefficient. The procedure is presented in detail and an example is included.

C.Z.: 534.83
621.373

APLICAREA SUCCESIVĂ A PERTURBAȚIILOR LA UN OSCILATOR ARMONIC LINIAR

V. A. POPESCU, I. M. POPESCU *

Este relevată posibilitatea divizării unei perturbații în elemente mici $\alpha V, \beta V, \ldots$ acționînd astfel : αV se aplică la Hamiltonianul neperturbat, βV se aplică la Hamiltonianul perturbat cu αV, etc.

Introducere

Teoria perturbațiilor se aplică cu succes în cazul în care perturbațiile sînt foarte mici. Pentru perturbații mari apar dificultăți legate de convergența seriei perturbaționale.

Un mod natural de a rezolva astfel de probleme, bazat pe aplicarea succesivă a metodei perturbațiilor este dat în acest articol.

Am ales pentru ilustrare un oscilator armonic liniar care este perturbat cu o forță constantă F. În acest caz problema are o soluție exactă permițînd să verificăm valabilitatea metodei propuse.

Valorile proprii ale Hamiltonianului neperturbat

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{1}$$

sînt

$$E_n^{(0)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

și funcțiile proprii sînt date de expresia

$$\psi_n^{(0)}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) \tag{3}$$

unde $H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)$ este un polinom Hermite de ordinul n.

* Asist. ; Prof. dr. ing., catedra Fizică

Hamiltonianul perturbat este exprimat astfel

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - Fx = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \frac{F}{m\omega}\right)^2 - \frac{F^2}{2m\omega^2} \tag{4}$$

Ecuaţia lui Schrödinger corespunzătoare devine

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\cdot\left[E + \frac{F^2}{2m\omega^2} - \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \frac{F}{m\omega^2}\right)^2\right]\psi = 0 \tag{5}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}y^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E' - \frac{m\omega^2}{2}y^2\right]\psi = 0 \tag{6}$$

unde am notat

$$y = x - \frac{F}{m\omega^2}, \quad E' = E + \frac{F^2}{2m\omega^2} \tag{7}$$

Din (6) obţinem

$$E'_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{8}$$

şi folosind (7) avem

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{F^2}{2m\omega^2} \tag{9}$$

Soluţia exactă (9) poate fi, de asemenea, obţinută folosind teoria perturbaţiei. Elementele de matrice pentru perturbaţia $V = -Fx$ sînt exprimate astfel [1]:

$$V_{nm} = -Fx_{nm} = -Fx_0\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{\frac{n}{2}}\,\delta_{m,n-1}\right) \tag{10}$$

unde

$$x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1)2} \tag{11}$$

Deoarece $V_{nn} = 0$, nu există corecţie de ordinul întîi la energie. Corecţia de ordinul al doilea la energie este

$$E_n^{(2)} = \epsilon^2 \sum_{m \neq n} \frac{V_{nm}V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = -\frac{\varepsilon^2 F^2}{2m\,\omega^2} \tag{12}$$

unde ε este un parametru perturbaţional. Nivelele de energie corespunzătoare Hamiltonianului neperturbat au fost ordonate astfel ca $E_{n+1} > E_n$.

Din (2) şi (12) se obţine soluţia exactă

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\varepsilon^2 F^2}{2m\omega^2} \tag{13}$$

Metoda

Perturbația este divizată în elemente mici $\alpha V, \beta V, \ldots$, care se aplică succesiv, adică αV este aplicat la Hamiltonianul neperturbat, βV la Hamiltonianul perturbat cu αV, etc. Se cere ca $0 < \alpha < \beta_0'$, unde β_0' este limita inferioară a razei de convergență a seriei perturbaționale iar α este un parametru perturbațional.

Dacă aplicăm αV la Hamiltonianul neperturbat, obținem

$$E_n^{(11)} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha^2 F^2}{2m\omega^2} \tag{14}$$

În aproximația de ordinul al doilea, funcția proprie normată este dată de expresia:

$$\psi_n^{(11)} = \frac{1}{\left[1 + \frac{\alpha^2 F^2}{\hbar m\omega^3}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha^4 F^4}{8\hbar^2 m^2\omega^6}(n^2 + n + 1)\right]^{1/2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{\psi_n^{(0)} - \frac{\alpha F x_0}{\hbar\omega}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\,\psi_{n-1}^{(0)} - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\,\psi_{n+1}^{(0)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2 F^2}{4\hbar m\omega^3}\left[\sqrt{n(n-1)}\,\psi_{n-2}^{(0)} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,\psi_{n+2}^{(0)}\right]\right\} \tag{15}$$

Această funcție de undă este ortogonală pe $\psi_{n'}^{(11)} (n' \neq n)$ dacă neglijăm termenii în $\alpha^3, \alpha^4, \ldots$

În practică funcțiile proprii perturbate intermediare sînt ortonormate folosind procedeul de ortogonalizare a lui Schmidt.

Acum perturbăm cu βV starea descrisă de energia din (14) și funcția de undă din (15) în care termenul în α^4 este neglijat. Corecțiile de ordinul întîi și al doilea la energie sînt date de

$$E_n^{(111)} + E_n^{(112)} = \beta \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{(11)*}(-Fx)\psi_n^{(11)}\,\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{(11)*}\psi_n^{(11)}\,\mathrm{d}x} +$$

$$+ \beta^2 \sum_{m \neq n} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{(11)*}(-Fx)\psi_m^{(11)}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^{(11)*}(-Fx)\psi_n^{(11)}\,\mathrm{d}x}{E_n^{(11)} - E_m^{(11)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n^{(11)}|^2\,\mathrm{d}x} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_m^{(11)}|^2\,\mathrm{d}x} \tag{16}$$

În relația (16), integralele care intervin sînt de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^{(11)}\psi_{n'}^{11}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^{(0)}\psi_{n'}^{(0)}\,dx - \frac{\alpha F x_0}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{n'}{2}}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^{(0)}\psi_{n'-1}^{(0)}\,dx + \frac{\alpha F x_0}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^{(0)}\psi_{n'+1}^{(0)}\,dx +$$

$$+\frac{\alpha^2F^2}{3\hbar m\omega^3}\sqrt{n'(n'-1)}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^{(0)}\psi_{n'-2}^{(0)}\,dx + \frac{\alpha^2F^2}{4\hbar m\omega^3}\sqrt{(n'+1)(n'+2)}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^{(0)}\psi_{n'+2}^{(0)}\,dx - \frac{\alpha F x_0}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n-1}^{(0)}\psi_{n'}^{(0)}\,dx +$$

$$+\frac{\alpha^2F^2x_0^2}{\hbar^2\omega^2}\sqrt{\frac{nn'}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n-1}^{(0)}\psi_{n'-1}^{(0)}\,dx - \frac{\alpha^2F^2x_0^2}{\hbar^2\omega^2}\sqrt{\frac{n(n'+1)}{4}}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n-1}^{(0)}\psi_{n'+1}^{(0)}\,dx - \frac{\alpha^3F^3x_0}{4\hbar^2m\omega^4}\sqrt{\frac{n\cdot n'(n'-1)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n-1}^{(0)}\psi_{n'-2}^{(0)}\,dx -$$

$$-\frac{\alpha^3F^3x_0}{4\hbar^2m\omega^4}\sqrt{\frac{n(n'+1)(n'+2)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n-1}^{(0)}\psi_{n'+2}^{(0)}\,dx + \frac{\alpha F x_0}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{n+1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n+1}^{(0)}\psi_{n'}^{(0)}\,dx - \frac{\alpha^2F^2x_0^2}{\hbar^2\omega^2}\sqrt{\frac{n'(n+1)}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n+1}^{(0)}\psi_{n'-1}^{(0)}\,dx +$$

$$+\frac{\alpha^2F^2x_0^2}{\hbar^2\omega^2}\sqrt{\frac{(n+1)(n'+1)}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n+1}^{(0)}\psi_{n'+1}^{(0)} +$$

$$+\frac{\alpha^3F^3x_0}{4\hbar^2m\omega^4}\sqrt{\frac{(n+1)n'(n'-1)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n+1}^{(0)}\psi_{n'-2}^{(0)}\,dx +\cdot$$

$$+\frac{\alpha^3F^3x_0}{4\hbar^2m\omega^4}\sqrt{\frac{(n+1)(n'+1)(n'+2)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n+1}^{(0)}\psi_{n'+2}^{(0)}\,dx +$$

$$+\frac{\alpha^2F^2}{4\hbar m\omega^3}\sqrt{n(n-1)}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n-2}^{(0)}\psi_{n'}^{(0)}\,dx - \frac{\alpha^3F^3x_0}{4\hbar^2m\omega^4}\sqrt{\frac{n(n-1)n'}{2}}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n-2}^{(0)}\psi_{n'-1}^{(0)}\,dx + \frac{\alpha^3F^3x_0}{4\hbar^2m\omega^4}\sqrt{\frac{n(n-1)(n'+1)}{2}}\cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n-2}^{(0)}\psi_{n'+1}^{(0)}\,dx + \frac{\alpha^4F^4}{16\hbar^2m^2\omega^6}\sqrt{n(n-1)n'(n'-1)}\cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n-2}^{(0)}\psi_{n'-2}^{(0)}\,dx + \frac{\alpha^4F^4}{16\hbar^2m^2\omega^6}\sqrt{n(n-1)(n'+1)(n'+2)}\cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n-2}^{(0)}\psi_{n'+2}^{(0)}\,dx + \frac{\alpha^2F^2}{4\hbar m\omega^3}\sqrt{(n+1)(n+2)}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n+2}^{(0)}\psi_{n'}^{(0)}\,dx -$$

$$- \frac{\alpha^3F^3x_0}{4\hbar^2m\omega^4}\sqrt{\frac{(m+1)(n+2)n'}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n+2}^{(0)}\psi_{n'-1}^{(0)}\,dx +$$

$$+ \frac{\alpha^3F^3x_0}{4\hbar^2m\omega^4}\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(n'+1)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n+2}^{(0)}\psi_{n'+1}^{(0)}\,dx + \frac{\alpha^4F^4}{16\hbar^2m^2\omega^6}\cdot$$

$$\cdot \sqrt{(n+1)(n+2)n'(n-1)}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n+2}^{(0)}\psi_{n'-2}^{(0)}\,dx + \frac{\alpha^4F^4}{16\hbar^2m^2\omega^6}\cdot$$

$$\cdot \sqrt{(n+1)(n+2)(n'+1)(n'+2)}\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_{n+2}^{(0)}\psi_{n'+2}^{(0)}\,dx \qquad (17)$$

Folosind relațiile de recurență

$$H_n' = 2n\,H_{n-1} \qquad (18)$$

$$H_n'' = 2n\,H_{n-1}' \qquad (19)$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,xH_n' = \frac{H_n''}{2} + nH_n \qquad (20)$$

și condiția de ortogonalitate a polinoamelor Hermite se obține :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^{(0)}\psi_{n-1}^{(0)}\,dx = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot n \qquad (21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^{(0)}\psi_{n-2}^{(0)}\,dx = 0 \qquad (22)$$

Din (15), (16), (21) și (22) avem

$$E_n^{(111)} = -$$

$$- \frac{\alpha\beta F^2}{m\omega^2}\left[1 + \frac{\alpha^2F^2}{2\hbar m\omega^3}(2n+1)\right]\frac{1}{1 + \frac{\alpha^2F^2}{2\hbar m\omega^3}(2n+1) + \frac{\alpha^4F^4}{8\hbar^2m^2\omega^6}(n+n+1}\,; \qquad (23)$$

care, dacă se neglijează termenul în α^4, devine

$$E_n^{(111)} = -\frac{\alpha\beta F^2}{m\omega^2} \tag{24}$$

Expresia pentru corecția de ordinul al doilea la energie, $E_n^{(112)}$, este mult mai complicată, dar ea devine foarte simplă dacă se neglijează termenii în α^4, α^6 și α^8 :

$$E_n^{(112)} = -\frac{\beta^2 F^2}{2m\omega^2} \tag{25}$$

Deci

$$E_n^{(111)} + E_n^{(112)} = -\frac{\alpha\beta F^2}{m\omega^2} - \frac{\beta^2 F^2}{2m\omega^2} \tag{26}$$

Sumînd (14) și (26) obținem

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha^2 F^2}{2m\omega^2} - \frac{\alpha\beta F^2}{m\omega^2} - \frac{\beta^2 F^2}{2m\omega^2} \tag{27}$$

Deoarece (13) este energia exactă a problemei vom cere (neglijînd termenii în α^3, α^4, ... și considerînd perturbația divizată în două elemente) ca aceasta să fie egală cu energia dată în (27)

$$\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\epsilon^2 F^2}{2m\omega^2} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha^2 F^2}{2m\omega^2} - \frac{\alpha\beta F}{m\omega^2} - \frac{\beta^2 F^2}{2m\omega^2} \tag{28}$$

care duce la

$$\epsilon^2 = (\alpha + \beta)^2 \tag{29}$$

sau

$$\epsilon = \pm(\alpha + \beta) \tag{20}$$

Soluția negativă va corespunde la cazul cînd perturbația inițială ar fi $-\epsilon V$ și aceasta este divizată în elemente negative $-\alpha V$, $-\beta V$, ... Atunci energia finală este neschimbată (se verifică dacă α trece în $-\alpha$, iar β în $-\beta$).

BIBLIOGRAFIE

1. *L. Landau, E. Lifchitz*, Mécanique Quantique, Edition MIR, Moscou, 1980.

Successive Application of Perturbations to a Linear Harmonic Oscillator

A possibility is revealed of dividing a perturbation into small elements $\alpha V, \beta V, \ldots$, acting as follows : αV is applied to the non-perturbed Hamiltonian, βV is applied to the Hamiltonian perturbed by αV, etc.

CZ.: 624.043 : 621.56

CALCULUL TENSIUNILOR ȘI DEPLASĂRILOR UNGHIULARE ALE ARBORILOR CU DISCURI ATAȘATE (VOLANȚI) SUPUȘI LA RĂSUCIRE PRIN ȘOC

V. DROBOTĂ*

În lucrare se stabilesc relațiile pentru calculul tensiunilor și deplasărilor unghiulare ale arborilor cu discuri atașate (volanți) în mișcare de rotație supuși la răsucire prin șoc.

Se arată importanța pe care o are calculul de verificare la răsucire prin șoc și sînt prezentate recomandările necesare pentru proiectarea unor astfel de arbori.

1. Introducere

În lucrările de specialitate calculul arborilor și osiilor se realizează în două etape importante și anume predimensionarea și verificarea acestora.

În ceea ce privește predimensionarea aceasta se face în două moduri și anume :

— predimensionarea printr-un calcul convențional simplificat, considerînd arborele solicitat numai la răsucire, luîndu-se pentru rezistența admisibilă la răsucire valori de ordinul $\tau_{at} = 15 \ldots 30$ MPa, valorile mici fiind recomandate pentru arbori de diametre mici, valorile mari fiind recomandate pentru arbori scurți, iar pentru răsucirea specifică valori cuprinse între $\theta_{at} = 0{,}2 \ldots .2°/\text{m}$, valorile mici pentru arbori lungi, cele mari pentru arbori scurți.

— predimensionarea arborelui cu luarea în considerație atît a solicitării la răsucire, cît și a celei la încovoiere, folosind dimensionarea la încovoiere cu un moment echivalent, în care se ține seama și de faptul că arborii sînt, în general, solicitați și la oboseală. În aceste cazuri se folosește ca rezistență admisibilă, rezistența la oboseală a materialului solicitat după un ciclu alternant simetric cu valori cuprinse între :

$\sigma_{at_{III}} = 30 - 40$ MPa pentru oțel;

$\sigma_{at_{III}} = 40 - 65$ MPa pentru oțel carbon;

$\sigma_{at_{III}} = 75 - 90$ MPa pentru oțel aliat.

* Conf. dr. ing., catedra Rezistența materialelor

În ceea ce privește verificarea dimensiunilor și formelor stabilite, aceasta are loc în mai multe etape și anume :

— verificarea la oboseală ;

— verificarea la deformații de încovoiere și răsucire ;

— verificarea la vibrații de încovoiere și răsucire ;

În literatura de specialitate nu se menționează ca necesară verificarea la solicitări prin șoc care este deosebit de importantă.

În prezenta lucrare se stabilesc relațiile pentru calculul la solicitarea la răsucire prin șoc a arborilor cu discuri atașate (volanți) și concluziile ce se impun legate de verificarea acestora.

2. Ipoteze de calcul

Pentru calculul arborilor supuși la răsucire prin șoc se folosește metoda multiplicatorului de impact.

În vederea aplicării acestei metode, în cazul arborilor în mișcare de rotație, se fac următoarele ipoteze :

1. Se admite valabilitatea teoremei lui Clapeyron, după care lucrul mecanic produs de sarcinile aplicate ce produc șocul (L), este egal cu energia de deformație acumulată de arbore (U).

2. Se consideră arbori drepți în mișcare de rotație cu viteză unghiulară constantă ($\omega = ct$), cu secțiune variabilă în trepte, pe care sînt situați volanți, în următoarele cazuri de încărcare :

— asupra fiecărui volant acționează momente de răsucire, care pentru întreg arborele sînt în echilibru ;

— asupra volanților nu acționează momente de răsucire, aceștia rotindu-se în gol ;

În ambele cazuri de încărcare șocul se produce prin blocarea uneia din extremitățile sistemului de arbori considerați sau a unuia din discurile atașate.

3. Materialul arborilor se consideră liniar elastic.

4. Nu se ține seama de masa proprie a arborilor.

5. Discurile (volanții) atașate arborelui sînt suficient de rigide și, în consecință, se neglijează elasticitatea lor.

3. Relații de calcul

Aceste ipoteze duc la următoarele relații de calcul între tensiuni,e, deplasările, rotirile specifice și eforturile ce se produc în arborii solicitați prin șoc și cele ce se produc dacă sarcinile sînt aplicate static, respectiv :

$$\tau_t = \psi\tau_{st} ; \quad \varphi = \psi\varphi_{st} ; \quad \theta = \psi\theta_{st} ; \quad M_t = \psi M_{st} \tag{1}$$

unde :

φ și τ sînt deplsările unghiulare, respectiv tensiunile tangențiale ce se produc în arbori datorită sarcinilor ce produc șocul ;

φ_{st} și τ_{st} — aceleași mărimi pentru aceleași sarcini aplicate static ;

M_t — momentele de răsucire ce se produc în arbori datorită sarcinilor ce produc șocul ;

M_{tst} — aceleași mărimi în arbori datorită acelorași sarcini ce produc șocul aplicate static;

ψ — un coeficient dinamic numit multiplicator de impact;

θ — unghiul de răsucire specifică datorită sarcinilor ce produc șocul;

θ_{st} — unghiul de răsucire specifică datorită acelorași sarcini aplicate static.

3.1. *Sisteme de arbori coaxiali în mișcare de rotație funcționînd în sarcină*

Se consideră un sistem de n arbori coaxiali, fiecare de diametru d_n și lungime l_n, la extremitățile cărora sînt atașate n discuri care transmit fiecare un moment de răsucire M_n, ce se rotesc cu viteza unghiulară constantă $\omega = ct$, sistem ce este blocat la extremitatea neîncărcată a arborelui n (fig. 1).

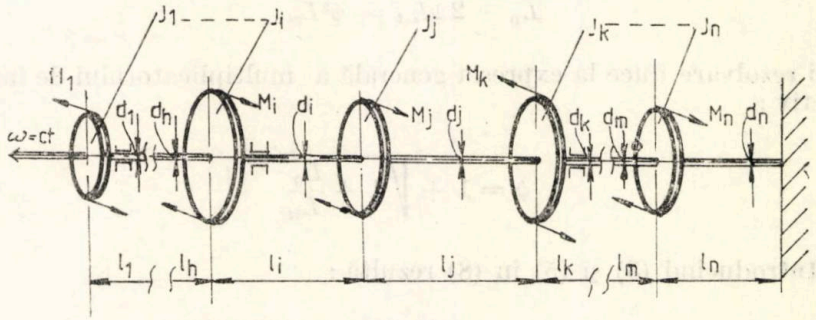


Fig. 1

Lucrul mecanic produs de sarcinile ce acționează asupra arborilor este dat de relația

$$L = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} J_i + \sum_{i=1}^{n} M_{tist}\, \varphi_{in} \tag{2}$$

unde:

$$M_{tist} = \sum_{k=1}^{i} M_k$$

este momentul de răsucire într-o secțiune oarecare a arborelui i:

φ_{in} — deplasarea unghiulară produsă de momentul de răsucire M_{ti} față de secțiunea blocată considerată extremitatea neîncărcată a arborelui n;

J_i — momentul de inerție masic al discului i;

Ținînd seama de ipotezele făcute relația (2) se poate scrie

$$L = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} J_i + \psi \sum_{i=1}^{n} M_{tist}\, \varphi_{inst} = L_0 + 2\psi L_{st} \tag{3}$$

relație în care s-au notat cu:

$$L_0 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} J_i \tag{4}$$

respectiv

$$L_{st} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_{t_{ist}}\,\varphi_{ist} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2G}\sum_{i=1}^{k} M_i^2 \sum_{i=k}^{n}\frac{l_i}{I_{pi}}\right] = \frac{1}{2G}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{k} M_i^2 \sum_{i=k}^{n}\frac{l_i}{I_{pi}}\right] \tag{5}$$

Energia de deformație a sistemului se obține cu relația

$$U = \sum_{i=1}^{n}\int_{V_i}\frac{\tau_i^2}{2G}\,dV = \psi^2\sum_{i=1}^{n}\int_{V_i}\frac{\tau_{ist}^2}{2G}\,dV + = \psi^2 L_{st} \tag{6}$$

Scriind egalitatea $L = U$ rezultă ecuația

$$L_0 + 2\psi L_{st} = \psi^2 L_{st} \tag{7}$$

a cărei rezolvare duce la expresia generală a multiplicatorului de impact, respectiv :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_0}{L_{st}}} \tag{8}$$

Introducînd (3) și (5) în (8) rezultă :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{G\omega^2 \sum_{i=1}^{n} J_i}{\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{k} M_i^2 \sum_{i=k}^{n}\frac{l_i}{I_{pi}}\right]}} \tag{9}$$

În relația (9) termenii numitorului fracției au semnul plus dacă sensul de rotire al arborelui coincide cu cel al cuplului și minus dacă sensurile sînt contrarii.

Dacă semnul numitorului fracției de sub radical este negativ, respectiv dacă radicalul este negativ sau mai mic decît 1 nu are loc fenomenul de solicitare prin șoc.

Pentru calculul unghiului de răsucire specifică într-un arbore oarecare i se folosește relația

$$\theta_i = \frac{\tau_{ti}}{GR_i} = \psi\frac{\tau_{tist}}{GR_i} \tag{10}$$

sau relația

$$\theta_i = \psi\frac{M_{t_{ist}}}{GI_{pi}} = \psi\frac{\sum_{k=1}^{i} M_k}{GI_{pi}} \tag{11}$$

Pentru calculul deplasării unghiulare $\Delta\varphi_{ej}$ între extremităţile arborilor e şi j se foloseşte relaţia

$$\Delta\varphi_{ej} = \varphi_j - \varphi_e = \frac{\psi}{G}\left\{\sum_{k=1}^{j}\left[\sum_{i=1}^{k} M_i \sum_{i=k}^{j}\frac{l_i}{I_{pi}}\right] - \sum_{k=1}^{l}\left[\sum_{i=1}^{k} M_i \sum_{i=k}^{e}\frac{l_i}{I_{pi}}\right]\right\} \quad (12)$$

3.2. *Sisteme de arbori coaxiali în mişcare de rotaţie funcţionînd în gol*

Se consideră un sistem de n arbori coaxiali, fiecare de diametru d_n şi lungime l_n, la extremităţile cărora sînt ataşate n discuri ce se rotesc cu viteza unghiulară constantă, ω sistem ce este blocat la extremitatea neîncărcată a arborelui n (fig. 2).

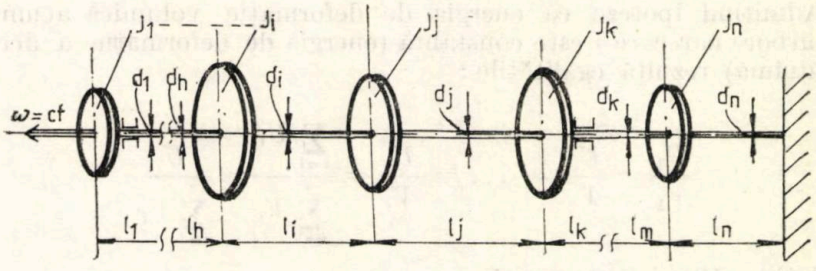


Fig. 2

Pentru acest caz expresiile lucrului mecanic de deformaţie L şi al energiei de deformaţie U, ţinînd seama de ipotezele făcute sînt :

$$L = L_0 = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} J_i \quad (13)$$

$$U = \sum_{i=1}^{n}\int_{V_i}\frac{\tau_i^2}{2G}\,\mathrm{d}V = \psi^2\sum_{i=1}^{n}\int_{V_i}\frac{\tau_{ist}^2}{2G}\,\mathrm{d}V = \psi^2 L_{st} \quad (14)$$

Din egalitatea $L = U$ rezultă pentru ψ expresia

$$\psi = \sqrt{\frac{L_0}{L_{st}}} \quad (15)$$

Energia de deformaţie este dată de relaţia

$$U = \sum_{i=1}^{n}\int_{V_i}\frac{\tau_i^2}{2G}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2G}\sum_{i=1}^{n}\int_{V_i}\frac{\tau_{ti}^2 r^2}{R_i^2}\,\mathrm{d}V =$$

$$= \frac{1}{2G}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{ti}^2 l_i I_{pi}}{R_i^2} = \frac{1}{2G}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{ti}^2 l_i W_{pi}^2}{R_i} \quad (16)$$

unde τ_i este tensiunea tangențială într-un punct oarecare al arborelui i situată la o rază oarecare r a secțiunii de diametru maxim $D_i = 2R_i$ cu moment de inerție polar I_{pi}, modul de rezistență polar W_{pi}, iar τ_{ti} este tensiunea tangențială maximă în aceeași secțiune a arborelui i.

Dacă se ține seama că

$$\frac{l_i W_{pi}}{R_i} = \frac{\pi R_i^3 l_i}{2R_i} = \frac{\pi R_i^2 l_i}{2} = \frac{V_i}{2} \tag{17}$$

atunci (13) devine

$$U = \frac{1}{4G} \sum_{i=1}^{n} \tau_{ti}^2 V_i \tag{18}$$

unde V_i este volumul arborelui i.

Admițînd ipoteza că energia de deformație volumică acumulată de un arbore oarecare i este constantă (energia de deformație a acestuia este minimă) rezultă egalitățile :

$$\frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2} = \ldots = \frac{U_i}{V_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i} U_i}{\sum_{i=1}^{i} V_i} = \frac{U}{\sum_{i=1}^{i} V_i} \tag{19}$$

din relațiile (18) și (19) rezultă

$$\frac{\tau_{t_1}^2 V_1}{V_1} = \frac{\tau_{t_1}^2 V_2}{V_2} = \ldots = \frac{\tau_{ti}^2 V_i}{V_i} = \ldots = \frac{\tau_{tn}^2 V_n}{V_n} \tag{20}$$

respectiv că

$$\tau_{t_1} = \tau_{t_2} = \ldots = \tau_{ti} = \ldots \tau_{tn} = \tau_t \tag{21}$$

Ținînd seama de (21), (18) devine

$$U = \frac{1}{4G} \tau_t^2 \sum_{i=1}^{n} V_i \tag{22}$$

Egalînd (22) cu (13) rezultă

$$\tau_t = \sqrt{\frac{2G\omega^2 \sum_{i=1}^{n} J_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}} \tag{23}$$

Calculul unghiului de răsucire specifică al unui arbore oarecare i se obține din relația

$$\theta_i = \frac{\tau_t}{GR_i} \tag{24}$$

iar deplasarea unghiulară între extremitățile arborilor e și j se obține cu relația

$$\Delta\varphi_{ej} = \varphi_j - \varphi_e = \sum_{i=e}^{j} \theta_i l_i = \frac{\tau_t}{G} \sum_{i=e}^{j} \frac{l_i}{R_i} \tag{25}$$

4. Concluzii

1. Relațiile generale pentru calculul multiplicatorului de impact ψ pentru arborii în mișcare de rotație în sarcină (fig. 1) sînt (8), (9). Tensiunile tangențiale într-o secțiune oarecare se obține cu relația corespunzătoare din (1).

2. Pentru arborii în mișcare de rotație la mersul în gol (fig. 2) calculul tensiunii tangențiale maxime (aceeași pentru orice arbore al sistemului cuprinsă între secțiunea blocată și extremitatea liberă a sistemului) se face cu relația (23).

3. Calculul unghiului de răsucire specifică θ_i și al deplasării unghiulare $\Delta\varphi_{ej}$ între extremitățile arborilor e și j la un sistem de arbori cu discuri atașate în mișcare de rotație la solicitarea prin șoc la mersul în sarcină se obțin cu relațiile (11) și (12) iar la mersul în gol cu relațiile (24) și (25).

În tabelul 1 sînt prezentate aceste mărimi și relațiile de calcul corespunzătoare.

5. Exemplu de calcul

Se dă sistemul de arbori cu discuri atașate din figura 3 care transmite prin discul 2 momentul motor necesar pentru acționarea discurilor 1 și 3.

Date :

$P = 20$ kW ;

$n = 10{,}6$ Hz (1000 rot./min) ;

$\tau_{at} = 15$ MPa ; $\theta_a = 1°/\text{m}$;

$G = 8 \cdot 10^4$ MPa ;

$M_1 = 2\ M_3 = \frac{2}{3} M_2$;

$l_1 = 0{,}4$ m ; $l_2 = 0{,}2$m ;

$m_1 = 0{,}5$ kg ; $m_2 = 1$ kg ;

$m_3 = 0\ 8$ kg;

$D_1 = 0{,}4$ m ; $D_2 = 0{,}6$ m ;

$D_3 = 0{,}8$ m.

Se cere să se calculeze tensiunile tangențiale și rotirile specifice ce iau naștere la solicitarea prin șoc a sistemului în sarcină și în gol.

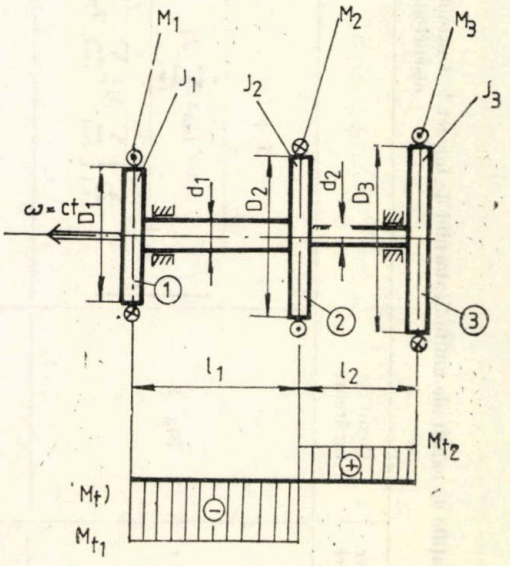


Fig. 3

Tabelul 1

Relațiile de calcul ale multiplicatorului de impact ψ, tensiunii tangențiale τ_t, rotirii specifice θ_i și deplasării unghiulare $\Delta\varphi_{ej}$ pentru arborii cu discuri atașate (volanți) la răsucire prin șoc

Nr. crt.	Cazul de încărcare	ψ	τ_t	θ_i	$\Delta\varphi_{ej}$
1	Fig. 1	$\sqrt{1+\dfrac{1+\dfrac{G\omega^2\sum_{i=1}^{n} J_i}{\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{k} M_i^2 \sum_{i=k}^{n} \dfrac{l_i}{I_{pi}}\right]}}}$	$\psi\tau_{tst}$	$\psi\dfrac{\sum_{k=1}^{i} M_k}{G\,I_{pi}}$	$\dfrac{\psi}{G}\left\{\sum_{k=1}^{j}\left[\sum_{i=1}^{k} M_i \sum_{i=k}^{j}\dfrac{l_i}{I_{pi}}\right] - \sum_{k=1}^{e}\left[\sum_{i=1}^{k} M_i \sum_{i=k}^{e}\dfrac{l_i}{I_{pi}}\right]\right\}$
2	Fig. 2	—	$\sqrt{\dfrac{2G\omega^2\sum_{i=1}^{n} J_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}}$	$\dfrac{\tau_i}{G\,R_i}$	$\sum_{i=e}^{j} 0_i l_i = \dfrac{\tau_t}{G}\sum_{i=e}^{j}\dfrac{l_i}{R_i}$
3	Fig. 2, în care $d_1 = \ldots = d_i = \ldots = d_n = d$	—	$\sqrt{\dfrac{8G\omega^2\sum_{i=1}^{n} J_i}{\pi d^2 \sum_{k=1}^{i} l_i}}$	$\dfrac{\tau}{GR}$	$\dfrac{\tau}{GR}$

Rezolvare

Calculul datelor preliminare ale sistemului

Se calculează momentele de răsucire transmise

$$M_2 = 9550\frac{P}{n} = 9550\frac{20}{1000} = 191 \text{ Nm};$$

$$M_1 = \frac{2}{3}M_2 = \frac{2}{3}191 = 127{,}33 \text{ Nm};$$

$$M_3 = \frac{1}{3}M_2 = \frac{191}{3} = 63{,}67 \text{ Nm};$$

Se calculează diametrele arborilor, folosind condiția de rezistență:

$$M_{t1} = M_1 = 127{,}33 \text{ Nm}; \quad M_{t2} = M_3 = 63{,}67 \text{ Nm}.$$

$$d_1 = 2R_1 = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{M_{t1}}{\tau_{at}}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{127{,}33}{15.10^6}} = 3{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m};$$

$$d_2 = 2R_2 = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{M_{t2}}{\tau_{at}}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{63{,}67}{15.10^6}} = 2{,}78 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Se calculează diametrele arborilor folosind condiția de rigiditate:

$$d_1 = 2R_1 = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi}\frac{M_{t1}}{G\theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi}\frac{127{,}33 \cdot 180}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10}}} = 3{,}084 \cdot 10^{-2} \text{ m};$$

$$d_2 = 2R_2 = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi}\frac{M_{t2}}{G\theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi}\frac{63{,}67 \cdot 180}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10}}} = 2{,}61 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Se aleg diametrele nominale rotunjind valorile în plus la valori standardizate și rezultă

$$d_1 = 36 \text{ mm}; \quad d_2 = 28 \text{ mm}.$$

Se calculează momentele de inerție și modulele de rezistență polare:

$$I_{p1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi(36 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 16{,}49 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4;$$

$$I_{p2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi(28 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 6{,}03 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4;$$

$$W_{p1} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{\pi(36 \cdot 10^{-3})^3}{16} = 9{,}16 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3;$$

$$W_{p2} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{\pi(28 \cdot 10^{-3})^3}{16} = 4{,}31 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3.$$

Se calculează tensiunile efective la solicitarea statică corespunzătoare noilor diametre și rezultă :

$$\tau_{t1st} = \frac{M_{t1}}{W_{p1}} = \frac{127{,}33}{9{,}16 \cdot 10^{-6}} = 13{,}86\ \text{MPa};$$

$$\tau_{t2st} = \frac{M_{t2}}{W_{p2}} = \frac{63{,}67}{4{,}31 \cdot 10^{-6}} = 14{,}77\ \text{MPa}.$$

Unghiurile de răsucire efectivă pentru cei doi arbori la solicitarea statică sînt :

$$\theta_1 = \frac{M_{t1}}{GI_{p1}} = \frac{127{,}33}{8 \cdot 10^{10} \cdot 16{,}49 \cdot 10^{-8}} = 0{,}965 \cdot 10^{-2}\ \text{rad/m} = 0{,}55°/\text{m};$$

$$\theta_2 = \frac{M_{t2}}{GI_{p2}} = \frac{63{,}67}{8 \cdot 10^{10} \cdot 6{,}03 \cdot 10^{-8}} = 1{,}32 \cdot 10^{-2}\ \text{rad/m} = 0{,}75\,°/\text{m}.$$

Se calculează momentele de inerție masice ale discurilor

$$J_1 = \frac{m_1 D_1^2}{8} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4^2}{8} = 10^{-2}\ \text{kgm}^2;$$

$$J_2 = \frac{m_2 D_2^2}{8} = \frac{1 \cdot 0{,}6^2}{8} = 4{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{kg m}^2;$$

$$J_3 = \frac{m_3 D_3^2}{8} = \frac{0{,}8 \,.0{,}8^2}{8} = 6{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{kgm}^2.$$

Calculul tensiunilor tangențiale și rotirilor specifice în arborii sistemului la solicitarea prin șoc la mersul în sarcină.

— Se blochează discul 1.

Multiplicatorul de impact are valoarea dată de relația (9)

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{G\,\omega^2(J_1 + J_3)}{M_{t_1}^2 \dfrac{l_1}{I_{p1}} - M_{t_2}^2\left(\dfrac{l_1}{I_{p1}} + \dfrac{l_2}{I_{p2}}\right)}} =$$

$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6}(4{,}5 + 6{,}4)10^{-2} \cdot 10^{-8}}{191^2 \dfrac{0{,}4}{16{,}49} - 63{,}67^2\left(\dfrac{0{,}4}{16{,}49} + \dfrac{0{,}2}{6{,}03}\right)}} = 4{,}475$$

Tensiunile tangențiale în cei doi arbori sînt :

$$\tau_{t1} = \psi \tau_{t1st} = 62{,}044 \text{ MPa} ; \quad \tau_{t2} = \psi \tau_{t2st} = 66{,}107 \text{ MPa}.$$

Unghiurile de răsucire specifică pentru cei doi arbori sînt :

$$\theta_{t1} = \psi \theta_1 = 4{,}475 \cdot 0{,}55 = 2{,}46°/\text{m} ; \quad \theta_{t2} = 4{,}475 \cdot 0{,}75 = 3{,}36°/\text{m}.$$

— Se blochează discul 2.

Multiplicatorii de impact au valorile

$$\psi_1 = 1 + \sqrt{1 + \frac{G\omega^2 J_1}{M_{t_1}^2 \dfrac{l_1}{I_{p1}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 10{,}6^2 \cdot 10^{-2}}{127{,}33^2 \dfrac{0{,}4}{16{,}49 \cdot 10^{-8}}}} = 2{,}813 ;$$

$$\psi_2 = 1 + \sqrt{1 + \frac{G\omega^2 J_3}{M_{t_2}^2 \dfrac{l_2}{I_{p2}}}} =$$

$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 10{,}6^2 \cdot 10^{-2} \cdot 6{,}4}{63{,}67^2 \dfrac{0{,}2}{6{,}03 \cdot 10^{-8}}}} = 5{,}74.$$

Tensiunile tangențiale corespunzătoare sînt :

$$\tau_{t1} = 2{,}813 \cdot 13{,}86 = 38{,}98 \text{ MPa} ; \quad \tau_{t2} = 5{,}74 \cdot 14{,}77 = 84{,}82 \text{ MPa}$$

Unghiurile de răsucire specifică pentru cei doi arbori sînt :

$$\theta_{t1} = \frac{\tau_{t1}}{GR_1} = \frac{38{,}98 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 18 \cdot 10^{-3}} = 0{,}027 \text{ rad/m} = 1{,}55°/\text{m} ;$$

$$\theta_{t2} = \frac{\tau_{t2}}{GR_2} = \frac{84{,}82 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 14 \cdot 10^{-3}} = 0{,}075 \text{ rad/m} = 4{,}34°/\text{m}$$

— Se blochează discul 3.

Multiplicatorul de impact are valoarea

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{G\omega^2 (J_1 + J_2)}{M_2^2 \dfrac{l_2}{I_{p2}} - M_1^2 \left(\dfrac{l_1}{I_{p1}} + \dfrac{l_2}{I_{p2}} \right)}} =$$

$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 10{,}6^2 (1 + 4{,}5) \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-8}}{191^2 \dfrac{0{,}2}{6{,}03} - 127{,}33^2 \left(\dfrac{0{,}4}{16{,}49} + \dfrac{0{,}2}{6{,}03} \right)}} = 3{,}255$$

Tensiunile tangențiale în cei doi arbori sînt :

$$\tau_{t1} = \psi \tau_{t1st} = 3{,}255 \cdot 13{,}86 = 45{,}118 \text{ MPa} ;$$

$$\tau_{t2} = \psi \tau_{t2st} = 3{,}255 \cdot 14{,}77 = 48{,}08 \text{ MPa}$$

Unghiurile de răsucire specifică pentru cei doi arbori sînt

$$\theta_{t1} = \frac{\tau_{t1}}{GR_1} = \frac{45{,}118 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 18 \cdot 10^{-3}} = 0{,}0313 \text{ rad/m} = 1{,}8°/\text{m};$$

$$\theta_{t2} = \frac{48{,}08 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 14 \cdot 10^{-3}} = 0{,}043 \text{ rad/m} = 2{,}45°/\text{m}$$

Calculul tensiunilor tangențiale și rotirilor specifice ce iau naștere în arborii sistemului la solicitarea prin șoc la mersul în gol

— Se blochează discul 1.

$$\tau_t = \sqrt{\frac{G\omega^2(J_2 + J_3)}{V_1 + V_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 10{,}6^2(4{,}5 + 6{,}4)10^{-2}}{\frac{\pi}{4}(3{,}6^2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}4 + 2{,}8^2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}2)}} = 42{,}98 \text{ MPa}$$

Unghiul de răsucire specifică maxim se obține cu relația

$$\theta_{t\max} = \frac{\tau_t}{GR_{\min}} = \frac{42{,}98 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-2}} = 3{,}83 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m} = 2{,}19°/\text{m}$$

— Se blochează discul 2.

$$\tau_{t1} = \sqrt{\frac{2G\omega^2 J_1}{V_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10{,}6^2 \cdot 10^{-2}}{\frac{\pi \cdot 3{,}6^2}{4} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}4}} = 21 \text{ MPa};$$

$$\tau_{t2} = \sqrt{\frac{2G\omega^2 J_3}{V_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 10{,}6^2 \cdot 10^{-2} \cdot 6{,}4}{\frac{\pi \cdot 2{,}8^2}{4} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}2}} = 96{,}66 \text{ MPa}.$$

Unghiurile de răsucire specifică pentru cei doi arbori sînt :

$$\theta_{t1} = \frac{\tau_{t1}}{GR_1} = \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-2}} = 1{,}458 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m} = 0{,}83°/\text{m};$$

$$\theta_{t2} = \frac{\tau_{t2}}{GR_2} = \frac{96{,}66 \cdot 2 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}8 \ 10^{-2}} = 8{,}63 \text{ rad/m} = 4{,}94°/\text{m}$$

— Se blochează discul 3.

$$\tau_t = \sqrt{\frac{G\omega^2(J_1 + J_2)}{V_1 + V_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 10{,}6^2(1 + 4{,}5)10^{-2}}{\frac{\pi}{4}(3{,}6^2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}4 + 2{,}8^2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-4})}} = 30{,}533 \text{ MPa}$$

Tabelul 2

Rezultatele calculelor efectuate pentru sistemul de arbori din exemplul de calcul

Nr. crt.	Arborele nr.	τ_{ai} pentru dimensionarea arborelui MPa	Diametrul nominal al arborelui mm	Regimul de lucru	Socul se produce blocînd discul nr.																	
						1			2			3			1			2			3		
						ψ	τ_{ti} MPa	θ °/m	ψ	τ_{ti} MPa	θ °/m	ψ	τ_{ti} MPa	θ °/m	τ_t MPa	θ_{max} °/m	τ_t MPa	θ_{max} °/m	τ_t MPa	θ_{max} °/m	τ_t MPa	θ_{max} °/m
1	1	15	36	În sarcină	1	4,475	62,044	2,46	2,813	38,98	1,55	3,255	45,118	1,8	42,98	2,19	21	0,83	30,533	1,56		
2	2		28	În gol	2		66,107	3,36	5,74	84,82	4,34		48,08	2,45			96,66	4,94				

Unghiul de răsucire specifică este :

$$\theta = \frac{\tau_t}{GR_{min}} = \frac{30{,}533 \cdot 10^6 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-2}} = 2{,}72 \cdot 10^{-2}\ \text{rad/m} = 1{,}56°/\text{m}$$

Rezultatele calculelor efectuate pentru sistemul de arbori din exemplul de calcul sînt prezentate în tabelul 2.

6. Concluzii

1. Cele mai mari tensiuni tangențiale și unghiuri de răsucire specifică s-au obținut prin blocarea sistemului de arbori și volanți la mersul în gol, tensiunea tangențială maximă fiind de peste 6 ori iar răsucirea specifică de circa 5 ori mai mare decît valorile admisibile, luate în calcul la dimensionarea arborilor în sarcină în regim static de funcționare.

2. În vederea obținerii valorilor maxime ale tensiunilor tangențiale și ale unghiurilor de răsucire specifică este necesar calculul în toate variantele posibile de solicitare prin șoc ale sistemului de arbori și volanți atît în sarcină cît și în gol.

3. Pentru obținerea unor valori cît mai mici ale tensiunilor tangențiale maxime, atît la mersul în gol cît și la mersul în sarcină, la proiectarea unor asemenea arbori este indicat ca dimensionarea să se facă cu valorile cele mai mici ale rezistențelor admisibile recomandate în literatura de specialitate pentru calculul arborilor ($\tau_{at} = 15 \ldots 35$ MPa).

4. Valoarea maximă a tensiunilor tangențiale trebuie să se găsească sub limita de curgere a oțelurilor din care sînt făcuți asemenea arbori, care este în jurul valorii $R_{rC,2} = 100$ MPa, ceea ce impune cu necesitate ca valorile maxime admisibile pentru calculul static al arborilor să se aleagă după cum s-a arătat la 3.

7. Recomandări pentru proiectarea arborilor

Din exemplul de calcul prezentat rezultă următoarele recomandări privind calculul arborilor :

1. Se impune cu necesitate verificarea prin calcul la solicitarea prin șoc.

2. Pentru calculul de predimensionare al arborilor la răsucire se vor folosi valorile numerice minime ale tensiunilor tangențiale admisibile τ_{at} recomandate de literatura de specialitate.

BIBLIOGRAFIE

1. *V. Féodossiev*, Résistence des matériaux, Éditions Mir, Moscou, 1971.
2. *S. D. Ponomariov* ș.a., Calculul de rezistență în construcția de mașini, Ed. Tehnică, 1960.
3. I. *Miroliubov* ș.a., Résistence des matériaux, Manuel de résolution des problèmes, Editions Mir, Moscou, 1973.
4. *M. Gafițeanu* ș.a., Organe de mașini, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1971.
5. *D. Pavelescu* ș.a., Organe de mașini, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.

La détermination des contraintes et des déplacements angulaires des arbres aux disques attachés (volants) soumis au choc.

Dans cet article on établissent les relations nécessaires pour le calcul des contraintes et des déplacements angulaires des arbres en supportant plusieurs volants, animés d'un mouvement de rotation quand on freine brusquement une extrémité de l'arbre.

Sont aussi présentées des recommandations nécessaires pour le calcul de ces arbres.

C.Z: 539.3:
512.643

A METHOD FOR THE SIMULATION OF THE CONTACT BETWEEN THE SURFACES OF TWO ELASTIC BODIES BY THE FINITE ELEMENT METHOD

N. CONSTANTIN, M. BLUMENFELD*

The contact between the surfaces of two elastic bodies is a less known phenomenon, in comparison with the contact in a point. Progresses in this field will permit the study of various joints under more realistic assumptions. In the paper are presented the results obtained by the authors in the simulation of this contact in the study of a Wheelon press and a bolt-nut joint, using the finite element method.

1. Introduction

The problem of the contact between the surfaces of two elastic bodies is particularly important for getting a more realistic approach to the stress distribution in various types of joints : bolt-nut joints, flanged joints, pad joints etc. In contrast with the problem of the contact in a point, which have been studied by many authors in the theory of elasticity [2], the problem presented in this paper is less tackled in the literature. Since the difficulties of an exact analytical solution are unavoidable, the efforts were directed towards simplified models or approximate numerical methods [3]. As the second direction seems to be more effective, the finite element method was applied here in the study of the surface contact between two bodies. The program SAP V2 has been used.

2. Method and results

The method described below has not the aim of finding the stress distribution in the proximity of the surfaces in contact, but to obtain a more realistic repartition of the contact forces. Thus, a more accurate stress distribution in the two bodies can be obtained. The method consists in the simulation of the contact using very short truss elements, each of them linking a node located on the surface of one body to another node located on the surface of the second body. The truss elements are normal to the contact surfaces. The forces which appear in them are the result of the overall deformation of the structure which is studied. If some of them are positive, it means that there is no real contact in this area. Hence, the

* Assist. eng., Prof. Ph. D. eng., Strength of Materials Chair

tensioned elements are to be removed, proceeding to a new iteration, until a stable situation is reached.

One of the applications of this method was made in the study of the stress distribution in the cylinder of a Wheelon press, whose cross section is shown in figure 1. Because of his symmetry, only one half of the structure was considered. The mesh used, presented in figure 2, has 825 nodes, defining 684 isoparametric quadrilateral plain strain elements. The contact between the parts 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 and 8, which transmit the 70 MPa

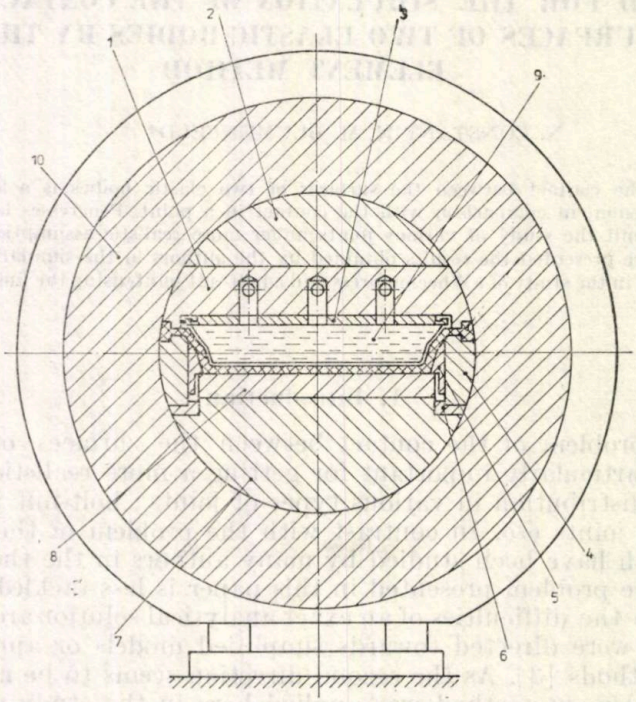


Fig. 1

pressure of the fluid 9 to the cylinder 10 (see fig. 1), was simulated with 72 truss elements. The final distribution of the contact forces is shown in figure 3. In figure 4 is presented the stress distribution in the cylinder.

Another application of the method was made in the analysis of the stress distribution in a bolt-nut joint. The joint considered in the calculus was a 10 to 1 scaled M 6 X 1 bolt, fitted with a cylindrical nut with five turns. The material used was C 45 steel. An axialsymmetrical stress distribution was assumed in the joint. Consequently, the calculus was performed on a model involving 897 nodes and 737 quadrilateral isoparametric plain strain elements (fig. 5). The contact between the flanks was simulated using three truss elements for each pair of turns. The trusses have been placed taking into account the real contact, which was observed not on the whole length theoretically covered by the flanks, but on a narrow

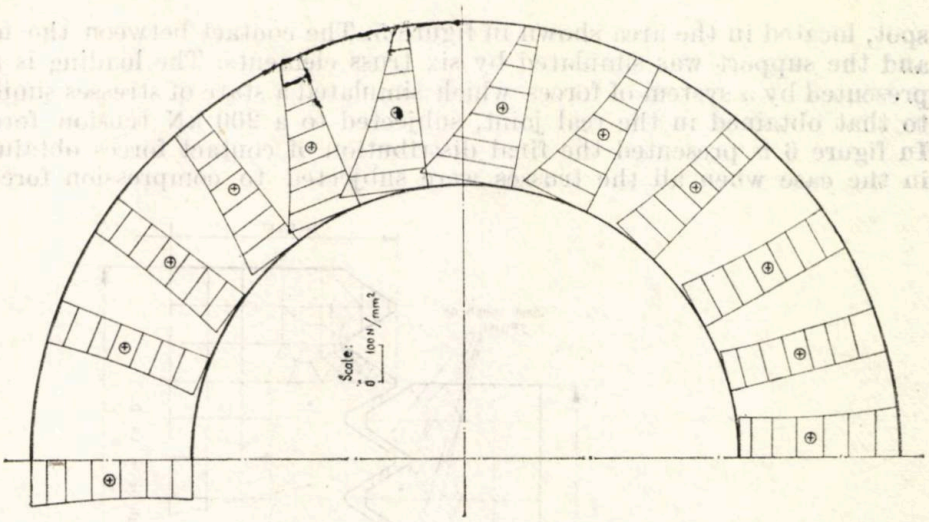


Fig. 4

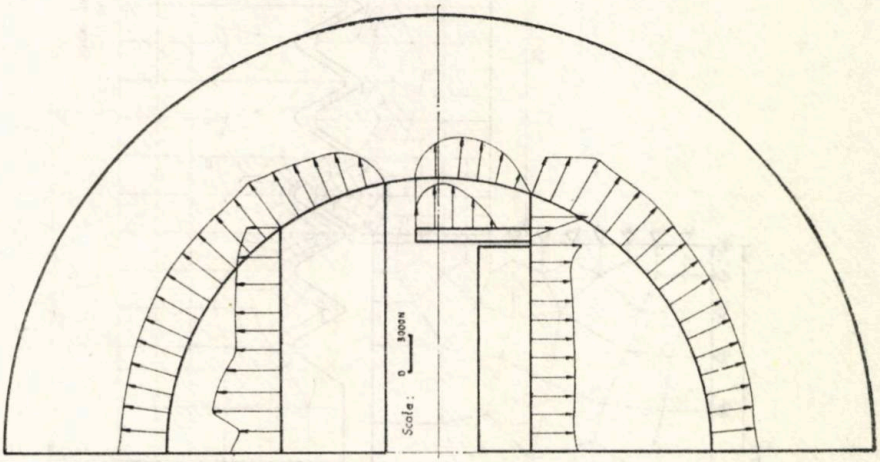


Fig. 3

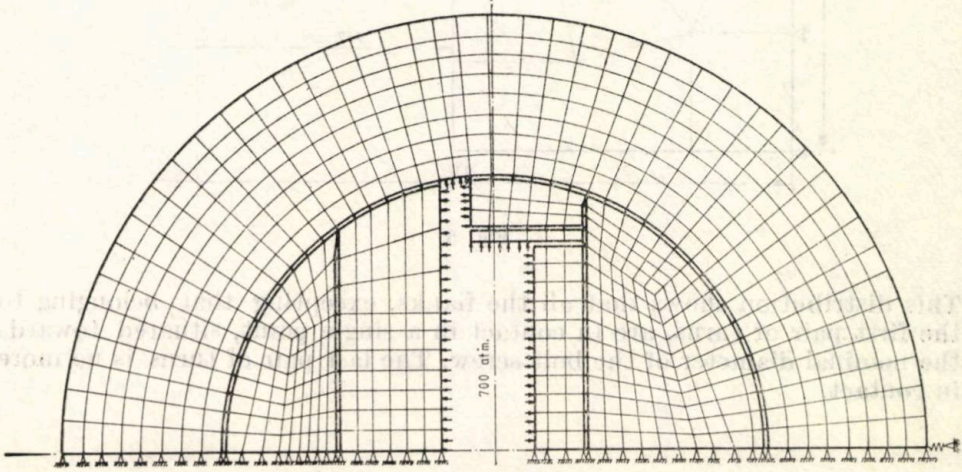


Fig. 2

spot, located in the area shown in figure 5. The contact between the nut and the support was simulated by six truss elements. The loading is represented by a system of forces which simulated a state of stresses similar to that obtained in the real joint, subjected to a 200 kN tension force. In figure 6 is presented the final distribution of contact forces obtained in the case when all the trusses were subjected to compression forces.

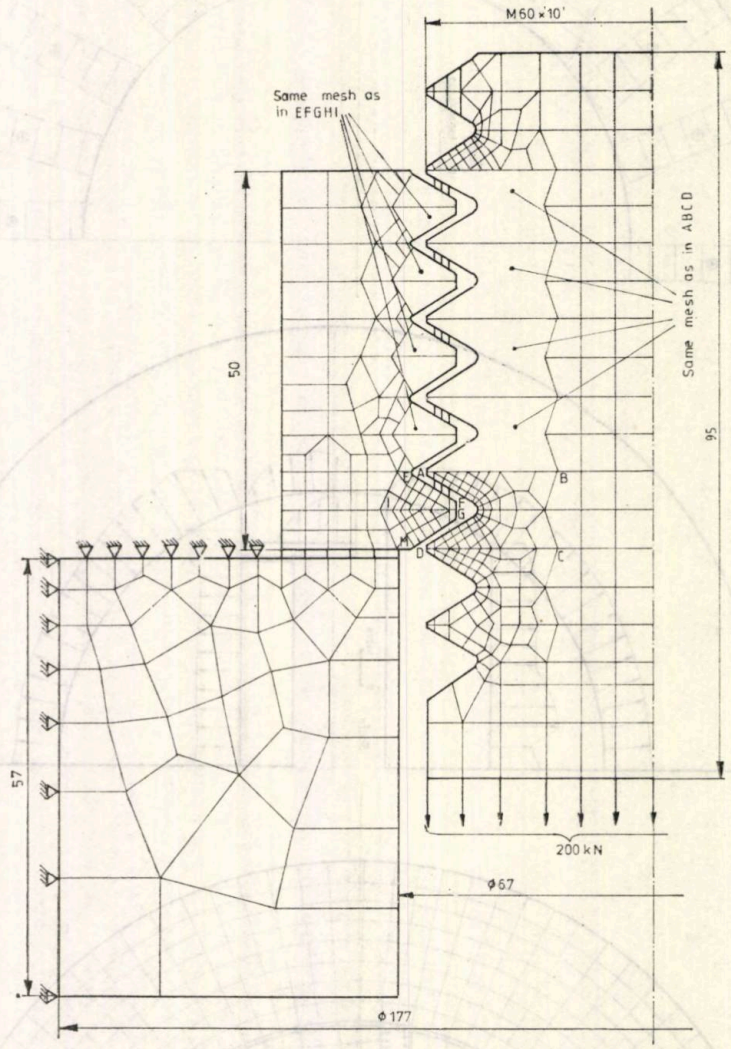
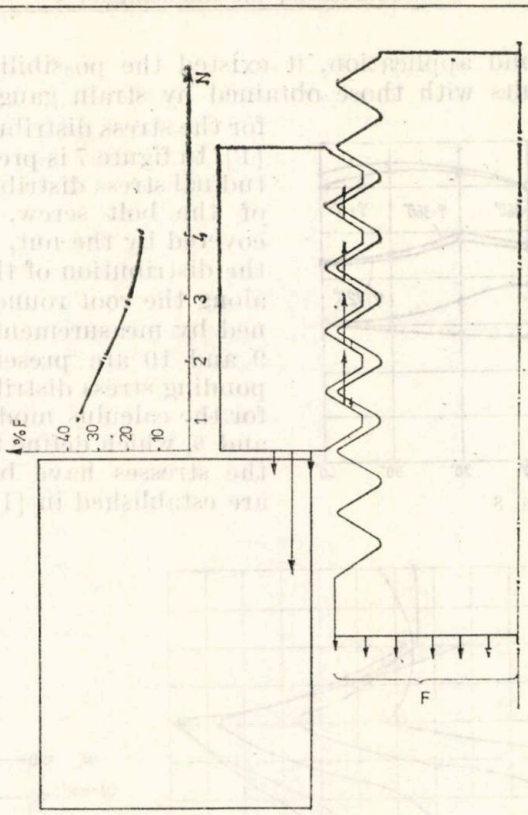


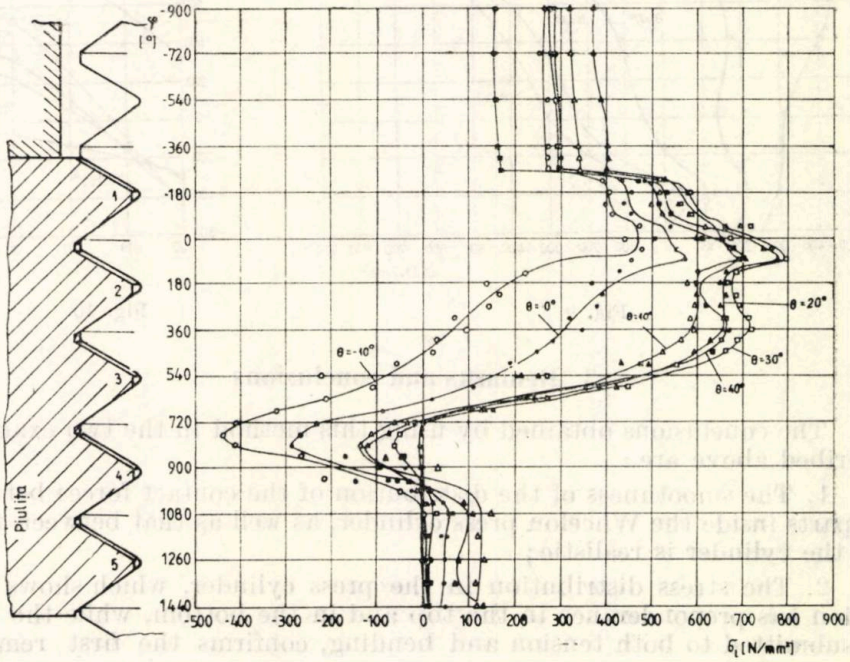
Fig. 5

This distribution shows that all the flanks, excepting that belonging to the first pair of turns, are in contact in a single point, situated towards the nominal diameter of the bolt screw. The last pair of turns is no more in contact.


N
1
2
3
4
%F
40
30
20
10
F

← Fig. 6

Fig. 7 ↓


φ [°]
-900
-720
-540
-360
-180
0
180
360
540
720
900
1080
1260
1440
1
2
3
4
5
Piulita
θ=-10°
θ=0°
θ=10°
θ=20°
θ=30°
θ=40°
-500
-400
-300
-200
-100
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
σ_t [N/mm²]

In the second application, it existed the possibility of comparing the calculus results with those obtained by strain gauge measurements for the stress distribution in the bolt [1]. In figure 7 is presented the longitudinal stress distribution at the root of the bolt screw, along the part covered by the nut, and in figure 8 the distribution of the same stresses along the root rounding, both obtained by measurements. In the figures 9 and 10 are presented the corresponding stress distributions obtained for the calculus model. The angles φ and θ, which define the points where the stresses have been determined, are established in [1].

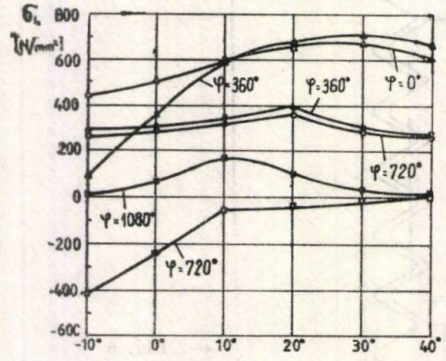


Fig. 8

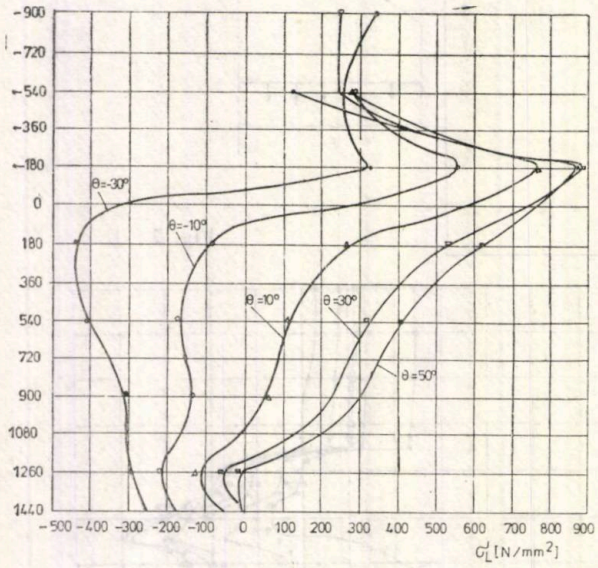


Fig. 9

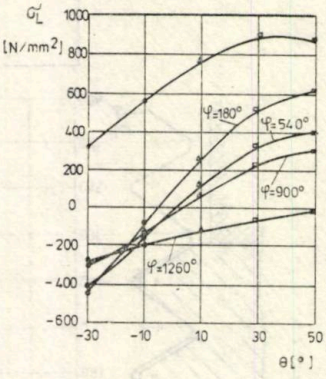


Fig. 10

3. Remarks and conclusions

The conclusions obtained by using this method in the two examples described above are :

1. The smoothness of the distribution of the contact forces between the parts inside the Wheelon press cylinder, as well as that between them and the cylinder is realistic ;

2. The stress distribution in the press cylinder, which shows that tension has preponderance in the top and in the bottom, while the sides are submitted to both tension and bending, confirms the first remark ;

3. The distribution of the loading force on the turns of the bolt-nut joint is considerably different from those obtained by some authors [3], [4], [5], [6], [7];

4. The longitudinal stress distribution at the root in the bolt screw obtained by calculus is in good agreement with the results obtained by strain gauge measurements;

5. The distribution of the contact forces between the flanks, obtained by the method described in the paper, shows that the various laws of distribution considered in the literature [3], [4], [5], [6], [7] are not realistic;

6. During the built up of the calculus model, great attention must be paid to the avoidance of the rigid body displacements.

The final conclusion is that the method presented is adequate for the simulation of the surface contact between elastic bodies. The next applications taken into consideration by the authors will be intended to improve the accuracy, in order to bring closer the calculus model and the real structure.

REFERENCES

1. *M. Blumenfeld, N. Constantin, V. Cosac*, The Study of Stress Distribution in a Bolt-Nut Joint by Strain Gauge Measurements, The 3rd National Symposium of Strain Gauge Measurements, Timişoara, 28th sept.—1st oct. 1983;
2. *L. Solomon*, Elasticitate liniară, Ed. Academiei, Bucureşti, 1969;
3. *G. B. Iosilevici*, Konţentraţiia napriajenii i deformaţii v detaliah maşin, Maşinostroenie, Moskva, 1981;
4. *H. Tanaka, K. Hongo*, Stress Analysis of Threaded Connections by Finite Element Method Bulletin of the J. S. M. E., Vol. 24, No. 194, August 1981;
5. *I. A. Birger*, Rasciot rezibovih soedinenii, Oboronghiz, Moskva, 1959;
6. *G. E. Paland*, Gewindelastwerteilung in der Schrauben-Muttern Verbindung, Konstruktion 19 (1967), H. 9;
7. *V. Ulmanu*, Determinarea analitică a deformaţiilor şi eforturilor în îmbinarea filetată conică la înşurubarea cu forţă de prestrîngere, S.C.M.A., tom 33, nr. 5, 1974.

Metodă de simulare a contactului între suprafeţele a două corpuri elastice cu ajutorul metodei elementelor finite

Contactul între suprafeţele a două corpuri elastice este un fenomen puţin studiat, spre deosebire de contactul punctual. Obţinerea unor rezultate bune în acest domeniu va permite studiul multor îmbinări în condiţii mai apropiate de realitate.

În lucrare se prezintă rezultatele obţinute de autori în simularea acestui contact cu ajutorul metodei elementelor finite pentru studiul unei prese cu celulă de fluid şi al unei îmbinări filetate.

C.Z. 621.45

ASUPRA UNEI METODE DE CALCUL A CARACTERISTICII DE LUCRU A MOTOARELOR TURBOREACTOARE SIMPLU FLUX BIROTOARE

V. STANCIU*

Lucrarea de față își propune să stabilească o metodă de calcul a caracteristicii de lucru a motorului turboreactor simplu flux birotor, pentru regimuri critice și supracritice de funcționare. La baza acestei metode stau corelațiile gazodinamice dintre grupurile turbocompresoare care intră în componența motorului, precizate prin ecuațiile fundamentale ale mecanicii.

1. Introducere

Una dintre căile de determinare cu precizie a performanțelor unui motor aeroreactor o constituie utilizarea caracteristicii de lucru a acestuia. Caracteristica de lucru reprezintă locul geometric al regimurilor de funcționare stabile ale motorului, indiferent de regimul de zbor sau turație. Aceasta se reprezintă pe caracteristica universală a compresorului, în situația unui motor turboreactor simplu flux monorotor. În condițiile în care în componența motorului intră două grupuri turbocompresoare, acesta fiind birotor, problema reprezentării caracteristicii de lucru și a calculului acesteia se complică, cele două rotoare nefiind legate din punct de vedere mecanic. Eventualele legături între cele două grupuri sînt de natură gazodinamică. Datorită acestor conexiuni, va exista întotdeauna o interdependență între grupul turbocompresor de joasă presiune și grupul turbocompresor de înaltă presiune pentru orice regim de funcționare al motorului. Situația se simplifică, în condiții de funcționare critice și supracritice, cînd în secțiunea de ieșire din prima rețea fixă a turbinei se realizează un regim de curgere sonic. Evident din condițiile nominale de funcționare (de calcul) se cunosc parametrii geometrici, cinematici, termodinamici și energetici principali, ai celor două grupuri.

În figura nr. 1 este reprezentată schema de principiu a unui motor turboreactor simplu flux, birotor Se afectează prin indicii I și II mărimile caracteristice ale grupurilor de joasă și înaltă presiune, și prin indicii 1—5, secțiunile fundamentale ale curgerii prin motor.

În general se definesc prin :

— $\dot{M}_a$, $\dot{M}_g$ debitul de aer, respectiv gaze de ardere, care traversează motorul ;

— π_c^*, gradul total de comprimare mecanică a aerului ;

---

* Șef lucrări dr. ing., catedra Aeronave

— δ_T^*, gradul total de destindere a gazelor în turbină;
— P^*, presiunea frînată a fluidului de lucru;
— T^* temperatura frînată a fluidului de lucru;
— l_c^*, l_T^*, lucrurile mecanice de comprimare respectiv destindere ale fluidului de lucru;

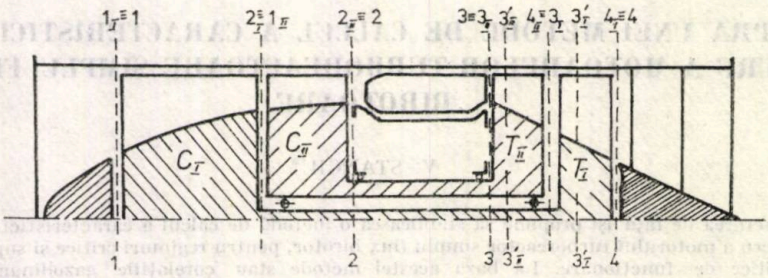


Fig. 1 — Schema de principiu a motorului turboreactor simplu flux birotor

— η_c^*, η_T^* randamentele adiabatice ale comprimării respectiv destinderii;
— σ^*, coeficientul de pierdere de presiune totală;
— λ, coeficientul de viteză al vitezei absolute a fluidului;
— α, A, unghiul vitezei absolute a fluidului cu direcția vitezei de transport și aria secțiunii;
— c_p, c_p', căldurile specifice la presiune constantă ale aerului și gazelor de ardere.

Cu aceste notații se poate exprima analitic caracteristica de lucru a motorului prin expresia:

$$\pi_c^* = f\left(\dot{M}_a \cdot \frac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*}\right) \tag{1}$$

și similar caracteristicile de lucru ale celor două grupuri:

$$\pi_{c\,\mathrm{I}}^* = f'\left(\dot{M}_a \cdot \frac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*}\right) \text{ pentru grupul de joasă presiune și} \tag{2}$$

$$\pi_{c\,\mathrm{II}}^* = f''\left(\dot{M}_a \cdot \frac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*}\right) \text{ sau} \tag{3}$$

$$\pi_{c\,\mathrm{II}}^* = f'''\left(\dot{M}_a \cdot \frac{\sqrt{T_{1\,\mathrm{II}}^*}}{P_{1\,\mathrm{II}}^*}\right) \text{ pentru} \tag{4}$$

grupul de înaltă presiune.

Există astfel posibilitatea unei analize mult mai detaliată a celor două grupuri precum și a ansamblului acestora deci a motorului. La baza

calculului stau legile fundamentale ale mecanicii, legile conservării masei și a energiei.

2. Ecuațiile funcționale ale grupurilor turbocompresoare

a) Grupul turbocompresor de joasă presiune.

Se consideră expresia debitului de gaze ce traversează turbina de joasă presiune aplicată în secțiunea minimă a turbinei $3'_I - 3'_I$;

$$\dot{M}_g = 0{,}0396 \cdot \frac{P^*_{3'I}}{\sqrt{T^*_{3'I}}} \cdot A_{3'I} \cdot q(\lambda_{3'I}) \cdot \sin\alpha_{3'I} \tag{5}$$

Ținînd seama că :

$$\dot{M}_g = m_g \cdot \dot{M}_a$$
$$P^*_{3'I} = P^*_{1I} \cdot \pi^*_c \cdot \sigma^*_{ca} \cdot \delta^*_{TII} \cdot \sigma^*_{sI}$$
$$T^*_{3'I} = T^*_{3I}$$

rezultă prin înlocuire relația :

$$\pi^*_c = C'_I \cdot \frac{1}{\delta^*_{TII} \cdot q(\lambda_{3'I})} \cdot \sqrt{\frac{T^*_{3I}}{T^*_{1I}}} \cdot \dot{M}_a \frac{\sqrt{T^*_{1I}}}{P^*_{1I}} \tag{6}$$

în care constanta C'_I este :

$$C'_I = \frac{25{,}25 \cdot m_g}{\sigma^*_{ca} \cdot \sigma^*_{sI} \cdot A_{3'I} \cdot \sin\alpha_{3'I}}$$

Din egalitatea puterilor produsă de turbina de joasă P_{TI} și puterea consumată de compresorul de joasă P_{cI} rezultă :

$$P_{TI} \cdot \eta_m = P_{cI} \qquad \text{sau}$$
$$l^*_{TI} \cdot \eta_m \cdot m_g = l^*_{cI} \tag{7}$$

Dacă notăm prin f_c și f_T expresiile :

$$f_c = \frac{\pi^{*\frac{k-1}{k}}_c - 1}{\eta^*_c} \; ; \quad f_T = \eta^*_T \left(1 - \frac{1}{\delta^{*\frac{k'-1}{k'}}_T}\right) \tag{8}$$

atunci se poate exprima în general :

$$l^*_c = i^*_1 \cdot f_c \qquad \text{și}$$
$$l^*_T = i^*_3 \cdot f_T \tag{9}$$

Prin urmare condiția (7) se poate scrie :

$$i^*_{3I} \cdot f_{TI} \cdot \eta_m \cdot m_g = i^*_{1I} \cdot f_{cI} \tag{10}$$

de unde :

$$\frac{T^*_{3I}}{T^*_{1I}} = \frac{C_p}{C_{p'}} \cdot \frac{1}{\eta_m \cdot m_g} \cdot \frac{f_{cI}}{f_{TI}}$$

sau :

$$\frac{T^*_{3I}}{T^*_{1I}} = C''_I \cdot \frac{f_{cI}}{f_{TI}} \text{ în care} \tag{11}$$

constanta $C''_I = \frac{C_p}{C_{p'}} \cdot \frac{1}{\eta_m \cdot m_g}$

În aceste condiţii relaţia (6) devine :

$$\pi^*_c = C_I \cdot \frac{1}{\delta^*_{TII} \cdot q(\lambda_{3'I})} \cdot \sqrt{\frac{f_{cI}}{f_{TI}}} \cdot \dot{M}_a \cdot \frac{\sqrt{T^*_{1I}}}{P^*_{1I}} \tag{12}$$

în care :

$$C_I = C'_I \cdot \sqrt{C''_I}$$

Relaţia (12) constituie ecuaţia funcţională a grupului turbocompresor de joasă presiune.

b) Grupul turbocompresor de înaltă presiune

Pe baza ecuaţiei debitului în secţiunea minimă a turbinei de înaltă presiune $3'_I - 3'_I$, rezultă

$$M_g = 0{,}0396 \cdot \frac{P^*_{3'II}}{\sqrt{T^*_{3'II}}} \cdot A_{3'II} \cdot q(\lambda_{3'II}) \cdot \sin\alpha_{3'II} \tag{13}$$

În condiţiile în care :

$$P^*_{3'II} = P^*_{1I} \cdot \pi^*_c \cdot \sigma^*_{ca} \cdot \sigma^*_{sI}$$

$$T^*_{3'II} = T^*_{3II} \quad \text{şi}$$

$$M_g = m_g \cdot \dot{M}_a$$

se obţine din relaţia (13) expresia :

$$\sigma^*_c = C'_{II} \cdot \frac{1}{q(\lambda_{3'II})} \cdot \sqrt{\frac{T^*_{3II}}{T^*_{1II}}} \cdot \dot{M}_a \cdot \frac{\sqrt{T^*_{1I}}}{P^*_{1I}} \tag{14}$$

unde constanta C'_{II} este de forma :

$$C'_{II} = \frac{25{,}25 \cdot m_g}{\sigma^*_{ca} \cdot \sigma^*_{sII} \cdot A_{3'II} \cdot \sin\alpha_{3'II}}$$

Pe de altă parte din egalitatea puterilor totale produse şi consumate, rezultă :

$$i^*_{3II} \cdot f_T \cdot \eta_m \cdot m_g = i^*_{1I} \cdot f_c$$

sau :

$$\frac{T^*_{3\,II}}{T^*_{1\,I}} = C''_{II} \cdot \frac{f_c}{f_T}, \text{ în care } C''_{II} = C''_{I}. \tag{15}$$

Prin urmare, înlocuind relaţia (15) în (14) se obţine :

$$\pi^*_e = C_{II} \cdot \frac{1}{q(\lambda_{3'II})} \cdot \sqrt{\frac{f_c}{f_T}} \cdot \dot{M}_a \cdot \frac{\sqrt{T^*_{1\,I}}}{P^*_{1\,I}} \tag{16}$$

în care : $C_{II} = C_{II} \cdot \sqrt{C''_{II}}$. Expresia (16) constituie ecuaţia funcţională a grupului turbocompresor de înaltă presiune.

3. Corelaţiile gazodinamice dintre grupuri

Evident debitele de fluid de lucru ce străbat cele două compresoare, sau cele două turbine, vor trebui să fie egale, adică :

$$\dot{M}_{aI} = \dot{M}_{aII} = \dot{M}_a \tag{17}$$

$$\dot{M}_{gI} = \dot{M}_{gII} = \dot{M}_g \tag{18}$$

Ţinînd seama că :

$$\dot{M}_{a\,I} = 0{,}04 \cdot \frac{P^*_{1\,I}}{\sqrt{T^*_{1\,I}}} \cdot A_{1\,I} \cdot q(\lambda_{1I}) \cdot \sin\alpha_{1I}$$

şi

$$\dot{M}_{a\,II} = 0{,}04 \cdot \frac{P^*_{1\,II}}{\sqrt{T^*_{1\,II}}} \cdot A_{1\,II} \cdot q(\lambda_{II}) \sin\alpha_{1\,II}$$

în care :

$$P^*_{1\,II} = P^*_{1\,I} \cdot \pi^*_{cI}$$

şi

$$T^*_{1\,II} = T^*_{1\,I}(1 + f_{c\,I})$$

rezultă conform condiţiei (17) expresia :

$$q(\lambda_{1\,II}) = B_c \cdot q(\lambda_{1\,I}) \cdot \frac{1}{\pi^*_{c\,I}} \cdot \sqrt{1 + f_{c\,I}} \tag{19}$$

unde :

$$B_c = \frac{A_{1\,I}}{A_{1\,II}} \cdot \frac{\sin\alpha_{3'\,II}}{\sin\alpha_{3'\,I}} \cdot \sqrt{C_p}$$

Relațiile (5) și (13), prin egalare, conform condiției (18), conduc la :

$$q(\lambda_{3'I}) = B_T \cdot q(\lambda_{3'II}) \cdot \frac{1}{\delta^*_{T\,II}} \cdot \sqrt{1 - f_{T\,II}} \tag{20}$$

în care :

$$B_T = \frac{A_{3'II}}{A_{3'I}} \cdot \frac{\sin\alpha_{3'II}}{\sin\alpha_{3'II}} \cdot \sqrt{C_{p'}}$$

4. Corelațiile energetice dintre grupuri

Din egalitățile puterilor produse și cele consumate pe cele două grupuri turbocompresor, respectiv pe întreg motorul :

$$\begin{cases} P_{T\,I} \cdot \eta_m = P_{c\,I} \\ P_{T\,II} \cdot \eta_m = P_{c\,II} \end{cases}$$

sau prin adunare

$$P_T \cdot \eta_m = P_c$$

rezultă prin înlocuiri, conform ecuațiilor (9) :

$$\begin{cases} i^*_{3\,I} \cdot f_{T\,I} \cdot \eta_m \cdot m_g = i^*_{1\,I} \cdot f_{c\,I} & (21) \\ i^*_{3\,II} \cdot f_{T\,II} \cdot \eta_m \cdot m_g = i^*_{1\,II} \cdot f_{c\,II} & (22) \end{cases}$$

sau

$$i^*_{3\,II} \cdot f_T \cdot \eta_m \cdot m_g = i^*_{1\,I} \cdot f_c \tag{23}$$

Evident :

$$i^*_{3\,I} = i^*_{3\,II}(1 - f_{T\,II}) \text{ și} \tag{24}$$

$$i^*_{1\,II} = i^*_{1\,I}(1 + f_{c\,I}) \tag{25}$$

Înlocuind (25) în (22) și împărțind relațiile (21) și (23), transformate, rezultă condiția :

$$\frac{f_{T\,II}}{f_T} = \frac{f_{c\,II}(1 + f_{c\,I})}{f_c} \tag{26}$$

Asemănător se pot obține prin alte combinații următoarele condiții :

$$\frac{f_{T\,I}(1 - f_{T\,II})}{f_{T\,II}} = \frac{f_{c\,I}}{f_{c\,II}(1 + f_{c\,I})} \text{ și} \tag{27}$$

$$\frac{f_{T\,I}(1 - f_{T\,II})}{f_T} = \frac{f_{c\,I}}{f_c} \tag{28}$$

Evident condițiile energetice dintre grupuri (26—28) sînt dependente între ele.

5. Corelațiile energetice în cadrul aceluiași grup

Pornind de la condițiile :

$$l_c^* = l_{c\,\mathrm{I}}^* + l_{c\,\mathrm{II}}^* \text{ și } l_T^* = l_{T\,\mathrm{II}}^* + l_{T\,\mathrm{I}}^*$$

se obțin relațiile similare :

$$f_c = f_{c\,\mathrm{I}} + f_{c\,\mathrm{II}}(1 + f_{c\,\mathrm{I}}) \tag{29}$$

$$f_T = f_{T\,\mathrm{I}}(1 - f_{T\,\mathrm{II}}) + f_{T\,\mathrm{II}} \tag{30}$$

care stabilesc legăturile dintre compresoare și ansamblul acestora respectiv între turbine și ansamblul acestora. La aceste condiții se adaugă :

$$\pi_c^* = \pi_{c\,\mathrm{I}}^* \cdot \pi_{c\,\mathrm{II}}^* \tag{31}$$

$$\delta_T^* = \delta_{T\,\mathrm{II}}^* \cdot \delta_{T\,\mathrm{I}}^* \tag{32}$$

De altfel relațiile (29) și (31) reprezintă pentru compresorul motorului condițiile de dependență între gradele de comprimare și randamentele comprimării. În condiții ideale de funcționare cînd $\eta_{c\,\mathrm{I}}^* = \eta_{c\,\mathrm{II}}^* = \eta_c^* = 1$, relația (29) degenerează în (31). Același lucru se poate afirma și despre relațiile (30) și (32) ce caracterizează procesul de destindere în turbină.

6. Calculul caracteristicii de lucru

Pe baza analizei anterioare s-au pus în evidență principalele relații care conduc efectiv la calculul caracteristicii. Din calculul motorului la regim nominal se stabilesc parametrii geometrici A_1, $A_{3'}$ parametrii cinematici din categoria unghiurilor α_1, $\alpha_{3'}$ Coeficienții de pierderi σ^* și randamentele mașinilor cu palete se aleg apriori ținîndu-se seama de condițiile din paragraful anterior.

Prin urmare, principalele necunoscute ale calculului sînt următoarele, opt :

$$\pi_{c\,\mathrm{I}}^*,\ \pi_{c\,\mathrm{II}}^*,\ \pi_c^*$$

$$\delta_{T\,\mathrm{I}}^*,\ \delta_{T\,\mathrm{II}}^*,\ \delta_T^*$$

$$\lambda_{3'\mathrm{I}},\ \lambda_{3'\mathrm{II}}$$

Evident mărimea $\dot{M}_a\sqrt{T_{1\,\mathrm{I}}^*}/P_{1\,\mathrm{I}}^*$ sau $M_a\dfrac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*}$

ținînd seama că :

$$T_{1\,\mathrm{I}}^* = T_1^* \text{ și}$$

$$P_{1\,\mathrm{I}}^* = P_1^*,$$

constituie un parametru ale cărui valori se aleg de la bun început.

Pe de altă parte, în condiții critice și supracritice de funcționare se poate admite că :

$$\lambda_{3'II} = 1 \text{ sau } q(\lambda_{3'II}) = 1 \text{ și}$$

$$\delta^*_{T\,II} = \delta^*_T \qquad \text{la regim nominal.}$$

Prin urmare matricea necunoscutelor se simplifică ea cuprinzînd :

$$\begin{bmatrix} \pi^*_{c\,II} & \pi^*_{c\,I} & \pi^*_c \\ \delta^*_{T\,I} & \delta^*_T & \lambda_{3'\,I} \end{bmatrix}$$

Determinarea valorilor acestor necunoscute, pentru o valoare $(\dot{M}_a\sqrt{T_1^*/P_1^*})_i$, este posibilă prin rezolvarea sistemului de ecuații alcătuit din relațiile (12), (16), (20), (31), (32) și (28).

$$\begin{cases} \pi^*_c = C'''_I \cdot \dfrac{1}{q(\lambda_{3'I})} \cdot \sqrt{\dfrac{f_{c\,I}}{f_{T\,I}}} \cdot \dot{M}_a \cdot \dfrac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*} & \text{(a)} \\ \pi^*_c = C_{II} \cdot \sqrt{\dfrac{f_c}{f_T}} \cdot \dot{M}_a \cdot \dfrac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*} & \text{(b)} \\ q(\lambda_{3'I}) = B_{T'} & \text{(c)} \\ \pi^*_c = \pi^*_{c\,I} \cdot \pi^*_{c\,II} & \text{(d)} \\ \delta^*_T = \delta^*_{T\,I} \cdot \delta^*_{T\,II} & \text{(e)} \\ \dfrac{f_{c\,I}}{f_c} = D_T \cdot \dfrac{f_{TI}}{f_T} & \text{(f)} \end{cases} \tag{33}$$

unde constantele B'_T și C'''_I sînt de forma :

$$B'_T = B_T \cdot \frac{1}{\delta^*_{T\,II\ nominal}} \cdot \sqrt{1 - f_{T\,II}}, \qquad C'''_I = C_I \cdot \frac{1}{\delta^*_{T\,II\ nominal}}$$

iar $\delta^*_{T\,II}$ și $D_T = \sqrt{1 - f_{T\,II}}$ sînt mărimi cunoscute.

În situația în care motorul turboreactor simplu flux este monorotor atunci :

$$\delta^*_{T\,II} = 1,\ f_{T\,II} = 0,\ D_T = 1\ ;$$

$$\delta^*_T = \delta^*_{T\,I},\ f_T = f_{T\,I}\ ;$$

$$\pi^*_{c\,II} = 1,\quad f_c = f_{c\,I} \text{ deoarece}$$

$$\pi^*_c = \pi^*_{c\,I}$$

În aceste condiții ecuațiile (a) și (b) sînt identice, ecuația (c) conduce al relația $\lambda_{3'I} = \lambda_{3'II} = 1$, ceea ce este evident, ecuația (f) degenerează într-o identitate iar relațiile (d) și (c) sînt evidente.
Prin urmare din sistem rămîne ecuația :

$$\pi_c^* = C_{II}''' \cdot \sqrt{f_c} \cdot \dot{M}_a \frac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*} \tag{34}$$

unde C_{II}''' exte o constantă de forma $C_{II}''' = C_{II} \cdot \frac{1}{\sqrt{f_T}}$

Se regăsește astfel relația de calcul a caracteristicii de lucru a motorului turboreactor simplu flux monorotor. Sistemul (33) se mai poate simplifica astfel :

$$\begin{cases} \pi_c^* = C_1 \cdot \sqrt{\frac{f_{cI}}{f_{TI}}} \cdot \dot{M}_a \frac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*} & \text{(a')} \\ \pi_c^* = C_{II} \cdot \sqrt{\frac{f_c}{f_T}} \cdot \dot{M}_a \frac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*} & \text{(b')} \\ \pi_c^* = \pi_{c\,I}^* \cdot \pi_{c\,II}^* & \text{(d')} \\ \delta_T^* = \delta_{T\,I}^* \cdot \delta_{T\,II}^* & \text{(e)} \\ \frac{f_{c\,I}}{f_c} = D_T \cdot \frac{f_{T\,I}}{f_T} & \text{(f)} \end{cases} \tag{35}$$

unde :

$$C_1 = C_I''' \cdot \frac{1}{B_T'} \text{ și } C_{II} = \delta_{T\,II}^*$$

Din ecuațiile (a), (b') și (f') se determină $\frac{f_c}{f_T}$ și $\frac{f_{cI}}{f_{TI}}$ apoi din ecuația (b') se stabilește π_c^*.
În continuare $\pi_c^* \rightarrow f_c$ deci f_T și imediat δ_T, respectiv din (e'), $\delta_{T\,I}^*$. Rezultă f_{TI} și implicit f_{cI} care conduce din $\pi_{c\,I}^*$, respectiv din (d'), $\pi_{c\,II}^*$.

Avînd cunoscute toate mărimile se reia calculul pentru o altă valoare $\dot{M}_a \frac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*}$, ș.a.m.d.

Se pot trasa apoi variațiile lui π_c^* în funcție de $\dot{M}_a \frac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*}$ și $\pi_{c\,I}^* = f'\left(M_a \frac{\sqrt{T_1^*}}{P_1^*}\right)$, adică, caracteristica de lucru a motorului respectiv a grupului de joasă presiune.
Ținînd seama că :

$$\dot{M}_a \cdot \frac{\sqrt{T_{1\,II}^*}}{P_{1\,II}^*} = \dot{M}_a \cdot \frac{\sqrt{T_{1\,I}^*}}{P_{1\,I}^*} \cdot \frac{\sqrt{1 + f_{c\,I}}}{\pi_{c\,I}^*} \tag{38}$$

se poate stabili și caracteristica grupului de înaltă tensiune, în coordonatele specifice grupului.

Concluzii

Metoda expusă se caracterizează prin simplitate și constituie o generalizare a metodei cunoscute din calculul motorului turboreactor simplu flux monomotor. Metoda poate fi ușor extinsă și în cazul motorului turboreactor dublu flux borotor, cu fluxuri separate.

BIBLIOGRAFIE

1. *V. Pimsner, ș.a.*, Energetica turbomotoarelor cu ardere internă, Ed. Academiei R.S.R., București, 1964.
2. *C. Berbente, V. N. Constantinescu*, Dinamica gazelor, Ed. I. P. București, volumul I, II, 1977

On a Method of Calculation of the Operating Line with a Two-Spool Turbojet Engine

The present paper aims to establish a method of calculation of the operating line with a two-spool turbojet engine in critical and overcritical working conditions. The method is based on the gasodynamic correlations between the gas generating groups in the engine, specified in terms of the fundamental equations of Mechanics.

C. Z.: 629.13.014

ALGORITM DE CALCUL ÎN TIMP REAL AL COMENZILOR PENTRU URMĂRIREA UNEI TRAIECTORII DEFINITE ÎN TIMP

I. STIHARU, C. BUNGETZIANU, CARMEN ALEXE, C. VASILIU*

În lucrare se formulează problema calculului comenzilor pentru urmărirea unei traiectorii definite în timp ce conduce la rezolvarea unui sistem liniar nedeterminat, ceea ce permite o mare flexibilitate în alegerea parametrilor algoritmului.

Se ia în considerare varianta identificării matricii exponențiale a sistemului cu o soluție aproximată în sensul celor mai mici pătrate, bazată pe măsurarea vectorului de stare.

Se prezintă algoritmul de calcul în timp real exemplificat pe un model neliniar simplificat, rezultat din considerarea mișcării tridimensionale a unui vehicul punctual.

I. Preliminarii. Determinarea formei legii de comandă

Avînd ca punct de plecare modelul mișcării aeronavei :

$$\dot{X}(t) = f[X(t),\ U(t)] \tag{1}$$

și o traiectorie definită în timp (4D) :

$$Y_D = g(t) \tag{2}$$

se va căuta o lege de comandă constantă pe intervale :

$$u = \sum_{k=1}^{r-1} u_{k\tau}(h_{k\tau} - h_{(k+1)\tau}) \tag{3}$$

cu $h_{k\tau}$ treapta Heaviside în $k\tau$, care aplicată sistemului să asigure atingerea traiectoriei dorite în puncte :

$$Y_D(t_k) = Y(t_k) \tag{4}$$

Pentru aceasta se va considera modelul liniarizat în ipoteza micilor perturbații în D'_+ :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + X_0\delta \\ y(t) = Cx(t)\,; \quad A \in M_{n,n}(\mathrm{R}),\quad B \in M_{n,m}(\mathrm{R}),\quad C \in M_{p,n}(\mathrm{R}) \end{cases} \tag{5}$$

* Șef lucrări dr. ing.; Asist., ing.; Asist. ing., catedra Aeronave; Ing. I.C.A. Brașov

și discretizantul său pe interval T :

$$\begin{cases} x[(K+1)T] = F \cdot x(KT) + G \cdot u(KT) \\ y(KT) = C \cdot x(KT) \end{cases} \tag{6}$$

cu $$F = e^{AT}; \quad G = \left(\int_0^T e^{At}\, dt \right) B$$

Se vor alege intervale de timp suficient de mici pentru a putea opera cu modelul liniarizat și discretizantul său. Considerînd ca ieșire a sistemului poziția aeronavei în spațiu, legea de comandă va avea ca obiectiv situarea acesteia la valori prescrise în timp, deci realizarea locală a condiției (2).

Răspunsul sistemului la comanda (3) va avea forma :

$$y(t) = h\,C\,e^{At}\,x_0 + h\,C\,e^{At}\;B*u \tag{7}$$

deci

$$y(r\tau) = h\,C\,e^{Ar\tau}\,x_0 + \sum_{k=1}^{r-1} h*hC[e^{A(r-k)\tau} - e^{A(r-k-1)\tau}]B\,u_{k\tau} \tag{8}$$

$$= hCe^{Ar\tau}x_0 + C\sum_{k=1}^{r-1}[G(r-K) - G(r-K-1)]\,u_{k\tau}$$

cu

$$G(K) = (h*he^{Ah\tau})B = \left(\int_0^{k\tau} e^{At}\, dt \right) B$$

Se poate pune în evidență diferența dintre ieșirea realizată aplicînd comanda și cea a sistemului liber :

$$y(r\tau) - h\,C\,e^{Ar\tau}\,x_0 = C\sum_{k=1}^{r-1}[G(r-K) - G(r-K-1)u_{k\tau} \tag{9}$$

pentru $r\tau = T$

$$y_d(T) - y_L(T) = C\,[G(r-1) - G(r-2) \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, G(1) - G(0)] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_\tau \\ \vdots \\ u_{(r-1)\tau} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$y_d(T) - CF\,x_0 = C\bar{G}\bar{u}_0 \tag{11}$$

În situația în care se prescrie în puncte KT valoarea vectorului de ieșire, rezultă relațiile :

$$y_d(2T) - y_L(2T) = y_d(2T) - h\,Ce^{AT}[h\,e^{AT}x_0 + \bar{G}\bar{u}_0] + C\bar{G}\bar{u}_1 \tag{12}$$

$$y_d(2T) - CF^2x_0 = CF\bar{G}\bar{u}_0 + C\bar{G}\bar{u}_1 \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} y_d(T) - CFx_0 \\ \vdots \\ y_d(LT) - CF^Lx_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CF^0\bar{G} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ CF^{L-1}\bar{G} & CF^{L-2}\bar{G} & \dots & CF^0\bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_0 \\ \vdots \\ \bar{u}_{L-1} \end{bmatrix} = \bar{H} \cdot \bar{U} \tag{14}$$

Notînd cu $H_i = CF^{L-i}\bar{G}$, matricea $\bar{H}$ va avea forma :

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \dots 0 \\ H_2 H_1 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \\ H_L H_{L-1} & \dots H_1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

iar (13) se va pune în forma :

$$Y_D - Y_L = \bar{H} \cdot \bar{U} \tag{16}$$

cu

$$Y_D^T = [y_d(T) \dots y_d(LT)]; \quad Y_L^T = [CFx_0 \dots CF^L x_0]; \quad \bar{U}^T = [\bar{u}_0 \dots u_{L-1}]$$

Relaţia (16) reprezintă un sistem liniar de $(p \times m) \times L$ ecuaţii cu $(r \times m) \times L$ necunoscute, în care m-numărul de intrări va fi patru pentru aeronave cu comenzi clasice (δ_p, δ_t — pe canalul longitudinal δ_e, δ_d — pe canalul lateral), iar p — numărul de ieşiri ale sistemului va fi trei (poziţia aeronavei în spaţiu într-un sistem adecvat de coordonate). Rezultă că prin alegerea lui $r \geqslant 4$ vom obţine un sistem cu o infinitate de soluţii, ceea ce ne va permite determinarea uneia care să verifice un criteriu de minimizare a reziduului :

$$J(\bar{U}^*) = \sum_{k=1}^{(r\times m)\times L} q_k[\bar{H}_k\bar{U} - (y_d(KT) - y_i(KT))]^2 \tag{17}$$

cu $\bar{H}_k$ liniile vectorului $\bar{H}$ şi q_k ponderi de penalizare a ecuaţiilor sistemului.

Comanda rezultată în urma condiţiei (17) va avea o formă echivalentă cu [2] în condiţia sistemului subdeterminat :

$$\bar{U}^* = (\bar{H}^T Q \bar{H})^{-1} H^T Q(Y_D - Y_L) \tag{18}$$

cu $Q = \text{diag}\,(q_1 \dots q_{(p\times m)\times L})$ matricea termenilor de penalizare.

Implementarea legii de comandă pentru urmărirea traiectoriei va necesita determinarea valorilor mărimii $y_d(kT)$ pentru construirea lui Y_D. Aceasta se va face asigurînd o apropiere exponenţială între traiectoria reală y_R şi cea dorită la distanţă mare de primul pas de aplicare a comenzii [2]. Pentru aceasta vom alege :

$$\begin{cases} y_d(T) = y_R(T) + \beta(y(0) - y_R(0)) \\ \vdots \\ y_d(LT) = y_R(LT) + \beta^L(y(0) - y_R(0)) \end{cases} \tag{19}$$

cu $y_R(kT)$ — traiectoria reală de urmărit la momente kT, $y(0)$ — ieșirea curentă a sistemului (poziția curentă), $\beta = \exp\left(-\frac{T}{\tau_0 K}\right)$, τ_0 constantă de timp modificabilă în procesul de calcul.

II. Modelul aeronavei pentru aplicația propusă

Aeronava se va modela liniar cu setul de ecuații clasice problemei de pilotaj, completat cu ecuațiile de trecere a componentelor vitezei din triedrul aeronavă în cel local orizontal [3].

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{LN} \\ \dot{x}_{LT} \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A_{LN} & A_{NT} & \\ A_{TN} & A_{LT} & 0_{8,3} \\ \hline & & \\ 0_{3,8} & & B_{AL,0} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_{LN} \\ x_{LT} \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} B_{LN} & 0_{4,2} \\ 0_{4,2} & B_{LT} \\ \hline & \\ 0_{3,4} & \end{array}\right] \begin{bmatrix} \delta_{LN} \\ \delta_{LT} \end{bmatrix}$$

$$y = [0_{1,8} \mid 1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_{LN} \\ x_{LT} \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$x_{LN}^T = [q\ u\ w\ \theta]$, $x_{LT}^T = [p\ r\ v\ \varphi]$

A_{LN}, A_{LT} — matricile de stare ale modelului liniar decuplat pe canalele longitudinal și lateral

A_{NT}, A_{TN} — matricile modelului de stare ce introduc cuplajul între canale

$B_{AL,O}$ — matricea de trecere din triedrul aeronavă în cel local orizontal

B_{LN}, B_{LT} — matricile de comandă pe canalele longitudinal și lateral

Va rezulta un model matricial de forma (5); prin introducerea unor intervale de timp de eșantionare $T \leqslant 0{,}1$ s se poate defini discretizantul (6). Pentru acest model matricea exponențială a sistemului F, care intervine în algoritmul de calcul al comenzii pentru urmărirea unei traiectorii în $4D$, se va identifica în timp real prin măsurători asupra vectorului de stare extins. Acestea se vor realiza pe sistemul liber ($u = 0$) la intervale de timp alese adecvat, matricea de comandă B a sistemului urmînd a se memora într-o bancă de matrici corespunzătoare regimurilor de zbor accesibile aeronavei în studiu. În acest mod vom avea la dispoziție mărimile de intrare ale algoritmului de calcul al comenzilor.

III. Identificarea matricii exponențiale a sistemului

Pentru intervale de timp $T \leqslant 0{,}1$ s și în ipoteza comportării libere a sistemului (1), va rezulta o legătură de forma :

$$x(t + T) = F \cdot x(t) \tag{21}$$

între vectorii de stare măsurați în sistem.

Renotînd și considerînd m măsurători efectuate, se poate scrie :

$$\begin{cases} x^1 = F \cdot x^\circ \\ \vdots \\ x^m = F \cdot x^{m-1} \end{cases} \tag{22}$$

care se poate pune în formă matricială :

$$[x^1 \vdots \ldots \vdots x^m] = F[x^\circ \vdots \ldots \vdots x^{m-1}] \tag{23}$$

$$X_{1,m} = F \cdot X_{0,m-1} \tag{24}$$

Din cauză că valorile $X_{0,m-1}$ și $X_{1,m}$ rezultă din măsurători, chiar pentru $m = n$, sistemul (24) nu admite soluție unică, situație care va impune luarea în considerare a pseudoinversiei $\overline{F}$ care minimizează eroarea $\|\overline{F} \cdot X_{0,m-1} - X_{1,m}\|$ în sensul celor mai mici pătrate.

În cazul a n măsurători asupra vectorului de stare al sistemului liber, efectuate pe o durată de timp suficient de scurtă pentru a putea considera A invariantă în timp, valoarea $\overline{F}$ rezultată în urma identificării va fi

$$\overline{F} = X_{1\,n}\, X^+_{0,n-1} \tag{25}$$

Problemele centrale ce intervin la identificarea în timp real a matricii exponențiale F sînt legate de precizia determinării componentelor vectorului de stare x, intervalul de măsurare T și condiționarea matricii $X_{0,n-1}$.

Prin echiparea aeronavei cu un sistem inerțial de navigație se asigură o precizie suficientă în măsurarea vectorului de stare.

Intervalul de eșantionare T pentru măsurători va fi în acest caz un multiplu al intervalului de calcul de înaltă frecvență din sistemul inerțial, limita sa minimă fiind determinată de frecvența maximă de achiziție de date din acest sistem .

În legătură cu condiționarea matricii $X_{0,n-1}$ se poate afirma că o alegere adecvată a unităților de măsură va echilibra această matrice pentru calcul, iar în cazul cînd variațiile unei mărimi rezultă din măsurători mai mici decît un parametru de condiționare numerică Δ se poate renunța la introducerea în calculul pseudoinversiei a respectivei linii din $X_{0,n-1}$.

În acest mod matricea F poate rezulta din identificarea suficient de precis, avînd la dispoziție și un criteriu de verificare a calculului, cu validarea acestuia. Dacă se preiau eșantioane la intervale $2T$ vom putea construi $\overline{F}_{2T}$:

$$\overline{F}_{2T} = X_{1,(2),n} \cdot X^+_{0,(2),n-1} \tag{26}$$

în paralel cu calculul în timp real F :

$$\overline{F}_T = X_{1,(1),n}\, X^+_{0,(1),n-1} \tag{27}$$

Se poate astfel periodic verifica :

$$\Delta\overline{F} = \overline{F}_{2T} - \overline{F}_T \leqslant \varepsilon_{\overline{F}} \tag{28}$$

Simulări numerice vor conduce la estimarea perioadei T de preluare a vectorului de stare după criteriul (28).

IV. Prezentarea algoritmului de identificare și calcul în timp real a comenzilor pentru urmărirea unei traiectorii în 4D

Algoritmul prezintă două părți: inițializarea și elaborarea comenzii. Pentru definirea pașilor de calcul s-au folosit notațiile specifice: $X_{1,m} - Z1$; $X_{0,m-1} - Z2$; $y_D - YD$; $y_L - YL$; $y_R - YR$; $\tau - TD$; $\tau_0 - TO$; $c - TC$; $t_f - TF$; $T_i - TI$; $\beta - BET$; $r - NR$; $m - NM$; $n - N$; $p - NP$; $G - EI$; $e^{AT_i} - FI$; $e^{AT_D} - FD$; $e^{AT_c} - FC$; MI — numărul de intervale necesar integrării numerice; $\rightarrow$ [ ] — citește și memorează vectorul; [$\downarrow$] elimină prima coloană din vectorul;

A. Inițializare
1. $\rightarrow$ [X]
2. J $\leftarrow$ 1
3. Z2 $\leftarrow$ [X]
4. $\rightarrow$ [X]
5. Z2 $\leftarrow$ [Z2 | X]
6. J $\leftarrow$ J + 1
7. dacă J $\leqslant$ N salt la 4.
8. Z $\rightarrow$ Z2$^+$
9. $\rightarrow$ [$\downarrow$ Z2], Z1 $\leftarrow$ Z2
10. $\rightarrow$ [X]
11. Z1 $\leftarrow$ [Z1 X]
12. FI $\leftarrow$ Z1 · Z
13. K $\leftarrow$ 1
14. $EI \leftarrow \frac{1}{2} \cdot TI \cdot I_{6,6}$
15. EI $\leftarrow$ EI + TI $(FI)^K$
16. K $\leftarrow$ K + 1
17. dacă K $\leqslant$ MI − 1, salt la 15.
18. $EI \leftarrow EI + \frac{1}{2} \cdot TI \cdot (FI)^{MI}$
19. EI $\leftarrow$ EI · B

B. Elaborare comandă
20. $\rightarrow$ [X]
21. $\rightarrow$ [$\rightarrow$Z2]
22. Z2 $\leftarrow$ [Z2 | X]
23. Z $\leftarrow$ Z2$^+$
24. $\rightarrow$ [X]
25. $\rightarrow$ [$\uparrow$ Z1]
26. Z1 $\leftarrow$ [Z1 | X]
27. FI1 $\leftarrow$ Z1 · Z
28. $\Delta \leftarrow \underset{I,J}{MAX} \frac{|FI1(I,J) - FI(I,J)|}{|FI1(I,J)|} \cdot 100$
29. IS $\leftarrow$ 0
30. dacă $\Delta > \Delta$ ADM, IS $\rightarrow$ 1

Calculul comenzii pe NR − 1 pași cu pas de calcul TD = MI · TI

31. FD $\leftarrow$ $(FI1)^{MI}$
32. FC $\leftarrow$ $(FD)^{NR}$
33. I $\leftarrow$ 1
34. PE $\leftarrow$ EI
35. G $\leftarrow$ PE
36. dacă I > NR − 2, salt la 41.
37. PE $\leftarrow$ FD · PE
38. G $\leftarrow$ [PE | G]
39. I $\leftarrow$ I + 1
40. salt la 36.

Calculul elementelor vectorului YY(NP, 1) diferența ieșirilor: $y - y_R$

41. I $\leftarrow$ 1
42. YY(NP, 1) $\leftarrow$ C · X(I, I) − − YR(I, 1)
43. I $\leftarrow$ I + 1
44. dacă I $\leqslant$ NP salt la 42.

Calculul elementelor vectorului răspuns liber YL(NP · L, 1)

45. K $\leftarrow$ 1
46. I $\leftarrow$ 1
47. YL(I + (K − 1)NP, 1) $\leftarrow$ $\leftarrow$ $C(FC)^K \cdot X(I, 1)$
48. I $\leftarrow$ I + 1
49. dacă I $\leqslant$ NP salt la 47.
50. K $\leftarrow$ K + 1
51. dacă K $\leqslant$ L salt la 46.
52. $BET \leftarrow EXP\left(-\frac{T}{NR \cdot TO}\right)$

Calculul elementelor vectorului YD(NP · L, 1)

53. K $\leftarrow$ 1
54. I $\leftarrow$ 1
55. YD(I + (K − 1)NP, 1) $\leftarrow$ $\leftarrow$ YR(I + (K − 1)NP, 1) − $-BET^K \cdot YY(I,1) - YL(I + (K-1)NP,1)$

Calculul elementelor matricii H:
56. K ← 1
57. I ← 1
58. J ← 1
59. HL(I+(K−1)NP,J) ← ← [C·(FC)$^{K-1}$·G] (I, J)
60. J ← J + 1
61. dacă J ⩽ NM(NR−1) salt la 59.
62. I ← I + 1
63. dacă I⩽ NP salt la 59.
64. K ← K + 1
65. dacă K ⩽ L salt la 57.
66. K ← 1
67. I ← 1 + (K−1)NP
68. J ← 1 + (K−1) (NR−1)NM
69. H(I, J) ← HL(I−(K−1)NP, J−(K−1) NM(NR−1))
70. J ← J + 1
71. dacă J⩽K·NM(NR−1) salt la 69.
72. I ← I + 1
73. dacă I ⩾NP·L salt la 69.
74. K ← K + 1
75. dacă K ⩾L salt la 67.
76. HI ← H$^+$

Calculul comenzilor U_0 pe NR−1 pași
77. I ← 1
78. K ← 1
79. U(I) ← 0
80. U(I) ← (U(I) + HI(I, K)· ·YD(K, 1)
81. K ← K + 1
82. dacă K ⩽L·NP salt la 80.
83. I ← I + 1
84. dacă I⩽ NM(NR−1) salt la 80

Se furnizează elementelor de execuție comanda calculată U_0
86. dacă TC< TF salt la 20.
87. STOP

V. Aplicație: urmărirea unei traiectorii cinematice pentru dirijarea în 4D

Algoritmul propus se va verifica pentru un caz simplificat care va permite o simulare a modelului neliniar (1), deci validarea numerică a metodei propuse.

Modelul aeronavei va fi cel rezultat din mișcarea acesteia ca punct material [1], cu luarea în considerare a mișcării atmosferei:

$$\begin{cases} \dot{X} = V\cos\gamma\cos\chi + W\cos(\chi_w - 180°) \\ \dot{Y} = V\cos\gamma\sin\chi + W\sin(\chi_w - 180°) \\ \dot{H} = V\sin\gamma = V\sin\tilde{\gamma} \quad (\tilde{\gamma} = -\gamma) \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{m}(T - D) - g\sin\gamma \\ \dot{\gamma} &= \frac{1}{m}\frac{L}{M}\cos\Phi - \frac{g}{V}\cos\gamma \\ \dot{\chi} &= \frac{1}{m}\frac{L}{V\cos\gamma}\sin\Phi \end{aligned} \tag{30}$$

cu X, Y, H — coordonatele aeronavei în triedrul local orizontal
V — viteza aeronavei față de fileurile de aer
γ — panta traiectoriei
χ — capul adevărat

W — viteza vîntului în triedrul local orizontal
χ_w — direcția vîntului

Avînd în vedere expresiile tracțiunii $T = T(V, h)$, rezistenței la înaintare D și portanței L, (30) se poate scrie :

$$\begin{cases} \dot{V} = \dfrac{u_1(T_0 - aV - bh)}{m} - \dfrac{1}{2m}\rho(h)\, S(C_{x_0} + KC_z^2)V^2 - g\sin\gamma \\ \dot{\gamma} = \dfrac{\rho(h)}{2m} SC_z V\cos\Phi - \dfrac{g}{V}\sin\gamma \\ \dot{\chi} = \dfrac{\rho(h)}{2m} S\, C_z V \sin\Phi \dfrac{1}{\cos\gamma} \end{cases} \tag{31}$$

cu $\rho(h) = \rho_0 (1 - 2.26\ 10^{-5}h)^{4.555}$, $K = \dfrac{C_x}{C_z^2}$, Φ — înclinarea laterală, T_0 — tracțiunea nominală la punct fix și u_1 — poziția manetei de gaze

$$(u_1 \cdot \in (0, 1))$$

Prin introducerea factorului de sarcină n :

$$n^2 = u_2^2 + u_3^2 \tag{32}$$

cu $u_2 = \dfrac{L}{G}\cos\Phi$, $u_3 = \dfrac{L}{G}\sin\Phi$

ecuațiile (31) se vor pune în forma finală :

$$\begin{cases} \dot{V} = u_1 \dfrac{T_0 - aV - bh}{m} - \dfrac{\rho(h)}{2m} SC_{x_0}V^2 - K\dfrac{mg^2}{\dfrac{\rho(h)}{2} SV^2}(u_2^2 + u_3^2) - g\sin\gamma \\ \dot{\gamma} = (u_2 - \cos\gamma)\dfrac{g}{V} \\ \dot{\chi} = u_3 \dfrac{g}{V\cos\gamma} \end{cases} \tag{33}$$

Modelul neliniar (30), (33) va fi folosit cu următoarele ipoteze simplificatoare : în calcule se va introduce aproximarea parabolică a polarei ; se neglijează deflexia tracțiunii datorată unghiului de atac ; masa aeronavei m și accelerația gravitațională g se consideră constante pe durata calculului.

În acest mod se constituie modelul neliniar (1) cu vectorii $X^T = [X, Y, H, V, \gamma, \chi]$, $U^T = [u_1, u_2, u_3]$. Restricțiile comenzilor u_2, u_3 sînt dictate de limitările factorului de sarcină n.

Sistemul va fi integrat numeric în timp cu pas de eșantionare dictat de agoritmul de calcul al comenzilor. În urma simulării se vor construi vectorii $X_{0,m-1}$, $X_{1,m}$ necesari procesului de identificare.

Matricea B se va introduce în calcul dintr-o bancă de matrici, precalculate funcție de regimul de zbor.

Particularitățile etapei de identificare a matricii exponențiale: Diferența cu aproape două ordine de mărime între primul set de măsurători (perturbația la $t = 0$) și restul determinărilor pe dinamica liberă a făcut necesară eliminarea pasului inițial, folosindu-se astfel pentru identificare încărcarea matricii $X_{0,n-1}$ cu pașii T, $2T$,...respectiv $X_{1,n}$ cu pașii $2T$, $3T$, ...

Variația foarte lentă a ultimilor două stări a determinat folosirea a $m = 4 < n = 6$ măsurători; aceasta a avut efect pozitiv asupra condiționării matricii $X_{0,m-1}$ și a dus la reducerea timpului de măsurare.

Pentru buna condiționare a matricii $X_{0,m-1}$ s-au ales următoarele unități de măsură:

$$x_1, x_2 - [m \times 100]; \; x_3 - [\text{m} \times 1\text{O}]; \; x_4 - [(\text{m/s}) \times 1\text{O}],$$

$$x_5 - [\text{grade}] \; x_6 - [\text{grade} \times 1\text{O}]$$

Simulări numerice cu rezultatele prezentate în tabelul I, au condus la alegerea timpului de eșantionare pentru identificare $T_i = 0,1$s

Tabelul I

T_i	$\max_{i,j}[\bar{F}X_{0,m-1} - X_{1,m}]$	$\max_{i,j}[\Delta\bar{F}]$
0,1	6.10^{-2}	$1,5.10^{-2}$
0,12	8.10^{-2}	$3,1.10^{-2}$
0,15	0,1	4.10^{-2}
0,2	0,13	0,1

VI. Rezultate și concluzii

Aplicația propusă a avut drept scop validarea prin simulare pe calculatorul numeric a rezultatelor teoretice expuse în lucrare. Din cauza dificultăților ce apar în definirea unei traiectorii cinematice generale în timp, ca urmare a restricțiilor la aplicarea comenzilor, s-a optat pentru o traiectorie obținută cu comenzi pseudoaleatoare limitate. În acest mod au rezultat traiectorii cu grad mare de generalitate, compuse din evoluții foarte complicate.

Parametrii zborului de bază pentru aeronave de referință de tip MIRAGE au fost următorii:

$X_0 = 100$ m; $Y_0 = 100$ m; $H_0 = 7000$ m; $V_0 = 250$ m/s; $\gamma_0 = 0°$

$\chi = 30$; $W = 30$ m/s; $\chi_w = 120°$; $U_{10} = 0,872$; $U_{20} = 1$; $U_{30} = 0$

S-au făcut simulări comparative cu următorii parametri ai algoritmului de urmărire: (fig. 1—5).

— interval de eșantionare a măsurătorilor 0,1 s

— număr de pași de integrare: 3

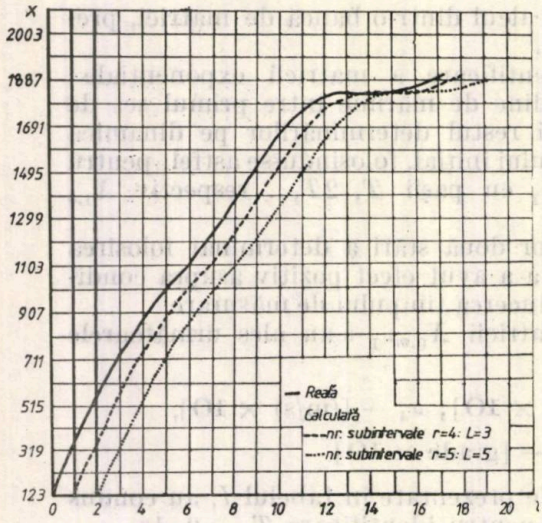


Fig. 1

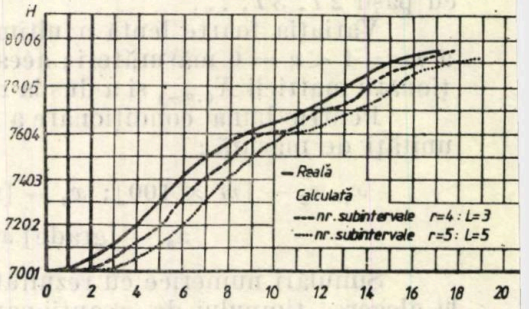


Fig. 2

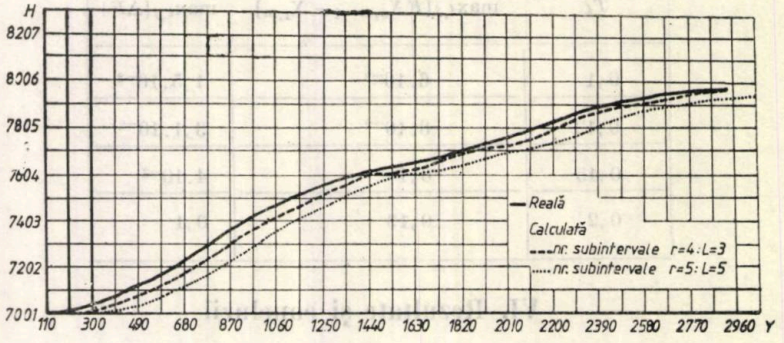


Fig. 3

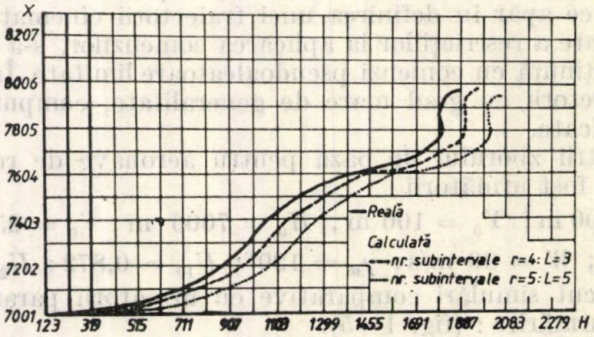


Fig. 4

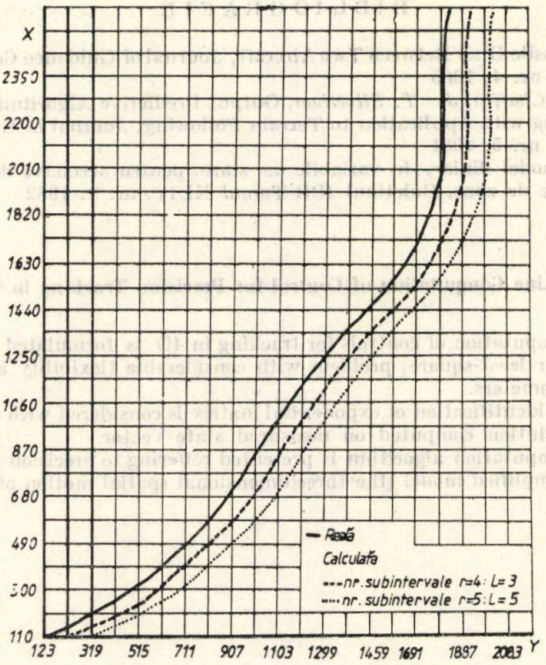


Fig. 5

— pas de eşantionare comenzi : 0,3 s

— număr de subintervale ale unui interval de predicţie : 4 — prima simulare 5 — simularea a doua

— număr de puncte de predicţie : 3 — simularea întîi, 5 — simularea a doua

— constanta de timp a apropierii exponenţiale : 0,4s

— eroare relativă maximă admisibilă la indentificarea matricii exponenţiale : 3%

— timp final de urmărire : 17 s

— calculul comenzilor s-a făcut considerînd ponderi unitare în relaţia (17)

Rezultatele simulărilor au pus în evidenţă o netezire a curbei generate de punctele traiectoriei calculate concomitent cu o scădere a abaterii faţă de traiectoria reală dorită, direct proporţională cu creşterea numărului de puncte de predicţie L.

Creşterea valorii r a numărului de comenzi pe punct de predicţie generează o scădere a amplitudinii comenzilor calculate pe intervalul curent.

În medie pentru $L = 3$ abaterea maximă de urmărire a traiectoriei este de 10 — 15 m, ea scăzînd la 4 — 5 m pentru $L = 5$ în cazul unui timp maxim de urmărire de 20 secunde.

BIBLIOGRAFIE

1. *B. Järmark*, A Missile Duel Between Two Aircraft, Journal of Guidance Control and Dynamics Vol. 8, nr. 4, 1985
2. *J. G. Raid, D. E. Chaffin, J. T. Silverhon*, Output Predictive Algoritmic Control Precision, Tracking with Application to Terrain Following, Journal of Guidance and Control Vo. 4, nr. 5, 1981
3. *I. Stiharu*, Un model liniar, în variabile de stare, pentru aeronave de transport în regim subsonic de zbor, Buletinul IPB Tomul XLIV, nr. 3, 1982

On Line Computation of Control for Precision Tracking in 4D

The computation of controls for tracking in 4D is formulated as an undetermined linear least-square, problem with considerable flexibility in selection of algorithm parameters.

On line identification of exponential matrix is considered with a least-square aproximate solution computed on measured state vector.

The computation algorithm is presented reffering to precision tracking with a nonlinear simplified model (the threedimensional spatial motion of a point-mass vehicle).

C.Z.:629.1.035

MANEVRE OPTIME ALE VEHICULELOR SPAȚIALE ÎN APROPIEREA PUNCTELOR DE LIBRAȚIE

AL. MARINESCU, ȘT. STAICU*

Lucrarea conține studiul manevrei optime cu minimum de combustibil a unui vehicul spațial, prevăzut cu instalație de propulsie de mică tracțiune, în apropierea punctelor de librație ale sistemului Pământ—Lună.

Aplicînd metoda variațională, se stabilesc relații analitice de calcul pentru poziția, viteza și tracțiunea pe unitatea de masă ale vehiculului spațial.

1. Notații

GXY — sistem inerțial cu originea în centrul de greutate G al sistemului Pământ—Lună

Gxy — referențial rotitor, atașat sistemului Pământ—Lună, cu originea în centrul de greutate G

$L\xi\eta$ — sistem de axe mobile cu originea în punctul de librație L

ξ, η — coordonatele punctului de librație în sistemul Gxy

$\overline{\xi}, \overline{\eta}$ — coordonatele vehiculului spațial în sistemul $L\xi\eta$

r — distanța între Pământ și punctul de librație

ρ — distanța între Lună și punctul de librație

S_1 — distanța între Pământ și centrul de greutate G

S_2 — distanța între Lună și centrul de greutate G

D — distanța între Pământ și Lună

t — timpul

τ — durata manevrei

ω — viteza unghiulară a sistemului Pământ—Lună în jurul lui G

μ — parametrul gravitațional al Pământului

m — masa vehiculului

m_1 — masa Pământului

m_2 — masa Lunii

V_ξ, V_η — componentele vitezei vehiculului de-a lungul axelor $L\xi$ și $L\eta$

a_ξ, a_η — componentele accelerației create de tracțiune, de-a lungul axelor $L\xi$ și $L\eta$

g — accelerația gravitațională a Pământului.

---

* Dr. Ing., INCREST; Șef lucrări dr. ing., catedra Mecanică

2. Introducere

Determinarea mişcării unui corp de mici dimensiuni în cîmpul de atracţie al Pămîntului şi Lunii constituie problema restrînsă a celor trei corpuri.

Studiul manevrelor de transfer din punctele de libraţie ale sistemului Pămînt—Lună spre orbite ale Pămîntului sau ale Lunii au făcut obiectul unor lucrări remarcabile [2], [3], în care s-a aplicat metoda impulsurilor. Însă, la transferul de pe orbite ale Pămîntului către puncte de libraţie, vom observa că pentru mici variaţii ale vitezelor iniţiale sau datorită influenţei unor perturbaţii apar mari deviaţii ale vehiculului de la traiectoria prevăzută.

În lucrarea de faţă se studiază manevra optimă a vehiculului în apropierea punctelor de libraţie sau pe orbite în jurul acestor puncte, aplicînd metoda tracţiunilor mici introdusă pentru prima dată de Al. Marinescu [1].

Vom considera vehiculul spaţial ca un punct material, prevăzut cu instalaţie de propulsie de mică tracţiune, care se deplasează în vecinătatea unui punct de libraţie L (fig. 1.).

În acest sens se consideră sistemul fix (inerţial GXY) şi apoi sistemul rotitor Gxy a cărui axă Gx coincide cu linia m_1m_2 şi ale căror origini se află în centrul de greutate G al sistemului m_1, m_2.

Să notăm cu $m^* = \frac{m_2}{m_1}$ raportul dintre masa Lunii şi cea a Pămîntului. Vom admite ca unitate de lungime distanţa $D = 1$ dintre corpurile m_1 şi m_2, ca unitate de masă se va lua chiar masa Pămîntului, iar unitatea de timp se alege astfel încît parametrul gravitaţional μ al masei m_1 să fie egal cu 1.

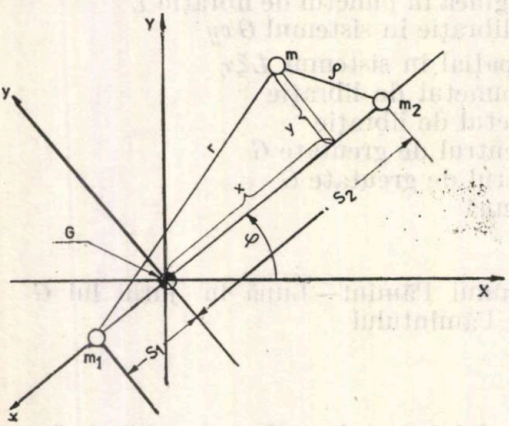


Fig. 1

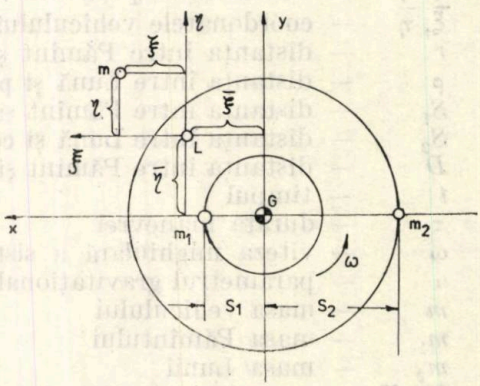


Fig. 2

Fie $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ coordonatele punctului de libraţie L (fig. 2), care coincide cu centrul de oscilaţie. În acest punct se fixează originea unui alt sistem $L\xi\eta$, ale cărui axe vor rămîne paralele cu axele mobile Gx, şi Gy. Faţă de acest sistem mobilul are coordonatele ξ, η şi viteza relativă $\vec{V}(V_\xi, V_\eta)$.

Pentru scrierea ecuațiilor mișcării relative, în raport cu sistemul mobil $L\xi\eta$, se calculează energia potențială și energia cinetică absolută a vehiculului și se introduc în ecuațiile lui Lagrange.

Ecuațiile diferențiale ale mișcării vehiculului spațial, sub acțiunea instalației de propulsie, în raport cu reperul $L\xi\eta$ sînt [1]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= V \\
\frac{dV_\xi}{dt} &= 2\omega V_\eta + K_1\xi + K_3\eta + a_\xi \\
\frac{d\eta}{dt} &= V_\eta \\
\frac{dV_\eta}{dt} &= -2\omega V_\xi + K_2\eta + K_3\xi + a_\eta,
\end{aligned} \tag{1}$$

unde a_ξ, a_η sînt componentele accelerației datorită tracțiunii.

În aceste relații constantele K_1, K_2 și K_3 au următoarele valori [4]:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{3}{4}(1 + m^*) \\
K_2 &= \frac{9}{4}(1 + m^*) \\
K_3 &= \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}(1 - m^*),
\end{aligned} \tag{2}$$

pentru punctele echidistante de librație și

$$\begin{aligned}
K_1 &= 1 + m^* + \frac{2}{r^3} + \frac{2m^*}{\rho^3} \\
K_2 &= 1 + m^* - \frac{1}{r^3} - \frac{m^*}{\rho^3} \\
K_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

pentru punctele coliniare de librație.

3. Problema variațională

În studiul manevrei optime se poate remarca analogia cu problema întîlnirii orbitale [5], [8]. Vom considera în acest sens mișcarea dintr-o poziție situată în apropierea punctului de libraţie, unde parametrii mișcării sînt cunoscuți, spre același punct unde $\xi = 0$, $\eta = 0$, $V_\xi = 0$, $V_\eta = 0$.

În cazul teoriei liniare, utilizînd ecuațiile liniare de mișcare (1), problema variațională a manevrei optime cu minimum de combustibil a vehiculului spațial, în apropierea punctelor de libraţie, se reduce la a găsi minimul funcţionalei

$$J = \int_{\tau}^{0} (a_\xi^2 + a_\eta^2)\mathrm{d}t, \tag{4}$$

cu condiţiile restrictive

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \dot{\xi} - V_\xi = 0 \\
\Phi_2 &= \dot{V}_\xi - 2\omega V_\eta - K_1\xi - K_3\eta - a_\xi = 0 \\
\Phi_3 &= \dot{\eta} - V_\eta = 0 \\
\Phi_4 &= \dot{V}_\eta + 2\omega V_\xi - K_2\eta - K_3\xi - a_\xi = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Introducînd multiplicatorii lui Lagrange λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 cu care se formează funcţia

$$F = a_\xi^2 + a_\eta^2 + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \lambda_3\Phi_3 + \lambda_4\Phi_4, \tag{6}$$

problema de extremum condiţionat se reduce la o problemă de extremum necondiţionat, astfel încît ecuaţiile lui Euler

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}}\right) = 0 \\
&\frac{\partial F}{\partial V_\xi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{V}_\xi}\right) = 0 \\
&- - - - - - - - \\
&\frac{\partial F}{\partial a_\eta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{a}_\eta}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

conduc la următoarele ecuaţii diferenţiale

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -K_1\lambda_2 - K_3\lambda_4$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_1 + 2\omega\lambda_4$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -K_3\lambda_2 - K_2\lambda_4 \tag{8}$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -2\omega\lambda_2 - \lambda_3$$

și la ecuațiile algebrice

$$2a_\xi - \lambda_2 = 0,\ 2a_\eta - \lambda_4 = 0. \tag{9}$$

Prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale extremalelor (1), (8) și ținînd seama de (9) se obțin funcțiile $\xi(t)$, $\eta(t)$, $V_\xi(t)$, $V_\eta(t)$, $a_\xi(t)$, $a_\eta(t)$ care definesc manevrele optime cu minimum de combustibil în apropierea punctelor de librație.

4. Soluții aproximative pentru punctele coliniare de librație

În acord cu lucrările [2], [3], care prevăd posibilitatea unor operațiuni spațiale legate de punctele coliniare de librație, în cele ce urmează vom stabili o soluție analitică aproximativă pentru studiul manevrelor optime în jurul acestor puncte.

Punînd $K_3 = 0$ în ecuațiile (1) și (8), obținem, pentru punctele coliniare de librație, următorul sistem de ecuații diferențiale ale extremalelor [1]:

$$\frac{d\xi}{dt} = V_\xi; \qquad \frac{dV_\xi}{dt} = 2\omega V_\eta + K_1\xi + a_\xi$$

$$\frac{d\eta}{dt} = V_\eta; \qquad \frac{dV_\eta}{dt} = -2\omega V_\xi + K_2\eta + a_\eta \tag{10}$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -K_1\lambda_2; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = 2\omega\lambda_4 - \lambda_1$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -K_2\lambda_4; \quad \frac{d\lambda_4}{dt} = -\lambda_3 - 2\omega\lambda_2.$$

Sistemul (10) poate fi integrat exact prin metode obișnuite. Vom neglija, într-o primă aproximație, forțele Coriolis care tind către zero în punctele de librație, iar în cadrul unităților adoptate în ecuațiile de mișcare vom ține seama că $K_1 > 0$ și $K_2 < 0$.

Notînd

$$k = \sqrt{K_1}, \quad \varkappa = \sqrt{-K_2}, \tag{11}$$

din sistemul de ecuații diferențiale al extremalelor rezultă relațiile

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\lambda}}_2 - k^2 \bar{\lambda}_2 &= 0 \\ \ddot{\bar{\lambda}}_4 + \varkappa^2 \bar{\lambda}_4 &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

ale căror soluții sînt

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_2 &= C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt \\ \bar{\lambda}_4 &= C_3 \cos \varkappa t + C_4 \sin \varkappa t. \end{aligned} \tag{13}$$

Pentru a lua în considerație și influența forțelor Coriolis vom reveni la sistemul exact de ecuații diferențiale (8) și vom calcula parametrii

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\omega \bar{\lambda}_4 - \frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}_2}{\mathrm{d}t} = \\ &= 2\omega(C_3 \cos \varkappa t + C_4 \sin \varkappa t) - k(C_1 \operatorname{sh} kt + C_2 \operatorname{ch} kt) \\ \lambda_3 &= -2\omega \bar{\lambda}_2 - \frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}_4}{\mathrm{d}t} = \\ &= -2\omega(C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt) + \varkappa(C_3 \sin \varkappa t - C_4 \cos \varkappa t). \end{aligned} \tag{14}$$

Acum se pot recalcula și parametrii λ_2, λ_4 în funcție de viteza unghiulară ω :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -\frac{1}{K_1} \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}t} = \\ &= C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt + \frac{2\omega\varkappa}{k^2}(C_3 \sin \varkappa t - C_4 \cos \varkappa t) \\ \lambda_4 &= -\frac{1}{K_2} \frac{\mathrm{d}\lambda_3}{\mathrm{d}t} = \\ &= C_3 \cos \varkappa t + C_4 \sin \varkappa t - \frac{2\omega k}{\varkappa^2}(C_1 \operatorname{sh} kt + C_2 \operatorname{ch} kt). \end{aligned} \tag{15}$$

Ținînd seama de ecuațiile algebrice (9), componentele tracțiunii pe unitatea de masă a vehiculului vor fi

$$a_\xi = \frac{1}{2}(C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt) + \frac{\omega\varkappa}{k^2}(C_3 \sin\varkappa t - C_4 \cos\varkappa t)$$
$$a_\eta = \frac{1}{2}(C_3 \cos\varkappa t + C_4 \sin\varkappa t) - \frac{\omega k}{\varkappa^2}(C_1 \operatorname{sh} kt + C_2 \operatorname{ch} kt). \tag{16}$$

Introducînd aceste rezultate în ecuațiile diferențiale neomogene

$$\ddot{\xi} - k^2\xi = a_\xi$$
$$\ddot{\eta} + \varkappa^2\eta = a_\eta, \tag{17}$$

obținute din (10), și integrînd obținem ecuațiile de mișcare

$$\xi = \left(C_5 + \frac{1}{4k}C_2 t\right)\operatorname{ch} kt + \left(C_6 + \frac{1}{4k}C_1 t\right)\operatorname{sh} kt + \\ + \frac{\omega\varkappa}{k^2(k^2+\varkappa^2)}(C_4 \cos\varkappa t - C_3 \sin\varkappa t)$$
$$\eta = \left(C_7 - \frac{1}{4\varkappa}C_4 t\right)\cos\varkappa t + \left(C_8 + \frac{1}{4\varkappa}C_3 t\right)\sin\varkappa t - \\ - \frac{\omega k}{\varkappa^2(\varkappa^2+k^2)}(C_2 \operatorname{ch} kt + C_1 \operatorname{sh} kt). \tag{18}$$

Pornind de aici, se determină componentele vitezei vehiculului spațial :

$$V_\xi = \left(C_6 k + \frac{1}{4k}C_2 + \frac{1}{4}C_1 t\right)\operatorname{ch} kt + \\ + \left(C_5 k + \frac{1}{4k}C_1 + \frac{1}{4}C_2 t\right)\operatorname{sh} kt - \\ - \frac{\omega^2\varkappa}{k^2(k^2+\varkappa^2)}(C_3 \cos\varkappa t + C_4 \sin\varkappa t)$$
$$V_\eta = \left(C_8\varkappa - \frac{1}{4\varkappa}C_4 + \frac{1}{4}C_3 t\right)\cos\varkappa t + \\ + \left(-C_7\varkappa + \frac{1}{4\varkappa}C_3 + \frac{1}{4}C_4 t\right)\sin\varkappa t - \\ - \frac{\omega^2 k}{\varkappa^2(\varkappa^2+k^2)}(C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt). \tag{19}$$

Funcţiile obţinute $\xi(t)$, $\eta(t)$, $V_\xi(t)$, $V_\eta(t)$, $a_\xi(t)$, $a_\eta(t)$, care caracterizează manevrele optime în jurul punctelor coliniare de libraţie, conţin 8 constante de integrare $C_1, C_2, \ldots C_8$. Pentru determinarea acestor constante, vom observa că problema mişcării vehiculului de pe orbita sa pînă în apropierea punctelor de libraţie sau cea a atingerii acestor puncte, venind din regiuni vecine, este asemănătoare cu cea a întîlnirii orbitale [5], [8], [10].

Din condiţiile iniţiale ($t = 0$):

$$\begin{aligned} \xi(0) &= \xi_0; \; V_\xi(0) = V_{\xi_0} \\ \eta(0) &= \eta_0; \; V_\eta(0) = V_{\eta_0} \end{aligned} \tag{20}$$

şi din condiţiile finale ($t = \tau$), corespunzătoare momentului sosirii vehiculului în punctul de libraţie

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &= 0; \; V_\xi(\tau) = 0 \\ \eta(\tau) &= 0; \; V_\eta(\tau) = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

se obţine sistemul algebric matriceal

$$[R]\{C\} = \{L\}, \tag{22}$$

în care elementele matricelor

$$[R] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix}$$

$$\{L\} = \{l_1 \; l_2 \; l_3 \; l_4\}^T \tag{23}$$

au expresiile

$$\alpha_1 = -\frac{1}{4}\tau \operatorname{sh} k\tau$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4k}(\operatorname{sh} k\tau - k\tau \operatorname{ch} k\tau)$$

$$\alpha_3 = \frac{\omega\varkappa}{k^2(k^2 + \varkappa^2)}(k \sin\varkappa\tau - \varkappa \operatorname{sh} k\tau)$$

$$\alpha_4 = \frac{\omega\varkappa}{k(k^2 + \varkappa^2)}(\operatorname{ch} k\tau - \cos\varkappa\tau)$$

$$\beta_1 = \frac{\omega k}{\varkappa^2(\varkappa^2 + k^2)}(\varkappa \operatorname{sh} k\tau - k \sin\varkappa\tau)$$

$$\beta_2 = \frac{\omega k}{\varkappa(\varkappa^2 + k^2)}(\operatorname{ch} k\tau - \cos\varkappa\tau)$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{4}\tau \sin\varkappa\tau$$

$$\beta_4 = \frac{1}{4\varkappa}(\varkappa\tau \cos\varkappa\tau - \sin\varkappa\tau)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4k}(\operatorname{sh} k\tau + k\tau \operatorname{ch} k\tau)$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4}\tau \operatorname{sh} k\tau$$

$$\gamma_3 = \frac{\omega\varkappa^2}{k^2(k^2 + \varkappa^2)}(\cos\varkappa\tau - \operatorname{ch} k\tau)$$

$$\gamma_4 = \frac{\omega\varkappa^2}{k^2(k^2 + \varkappa^2)}(\varkappa \sin\varkappa\tau + k \operatorname{sh} k\tau) \qquad (24)$$

$$\delta_1 = \frac{\omega k^2}{\varkappa^2(\varkappa^2 + k^2)}(\cos\varkappa\tau - \operatorname{ch} k\tau)$$

$$\delta_2 = -\frac{\omega k}{\varkappa^2(\varkappa^2 + k^2)}(\varkappa \sin\varkappa\tau + k \operatorname{sh} k\tau)$$

$$\delta_3 = \frac{1}{4\varkappa}(\sin\varkappa\tau + \varkappa\tau \cos\varkappa\tau)$$

$$\delta_4 = \frac{1}{4}\tau \sin\varkappa\tau$$

$$l_1 = \xi_0 k \operatorname{ch} k\tau + V_{\xi_0} \operatorname{sh} k\tau$$

$$l_2 = \eta_0 \varkappa \cos\varkappa\tau + V_{\eta_0} \sin\varkappa\tau$$

$$l_3 = \xi_0 k \operatorname{sh} k\tau + V_{\xi_0} \operatorname{ch} k\tau$$

$$l_4 = \eta_0 \varkappa \sin\varkappa\tau - V_{\eta_0} \cos\varkappa\tau.$$

Soluțiile sistemului (22) sînt date de relația matriceală

$$\{C\} = [R]^{-1}\{L\} \text{ det } [R] \neq 0, \tag{25}$$

de unde rezultă componentele C_1, C_2, C_3, C_4 ale matricei

$$\{C\} = \{C_1\ C_2\ C_3\ C_4\}^T. \tag{26}$$

Celelalte constante C_5, C_6, C_7 și C_8 se obțin din aceleași condiții la limită (20), (21); rezultă :

$$\begin{aligned}
C_5 &= \xi_0 - \frac{\omega\varkappa}{k^2(k^2+\varkappa^2)} C_4 \\
C_6 &= \frac{V_{\xi_0}}{k} - \frac{1}{4k^2} C_2 + \frac{\omega\varkappa^2}{k^3(k^2+\varkappa^2)} C_3 \\
C_7 &= \eta_0 + \frac{\omega k}{\varkappa^2(\varkappa^2+k^2)} C_2 \\
C_8 &= -\frac{V_{\eta_0}}{\varkappa} + \frac{1}{4\varkappa^2} C_4 + \frac{\omega k^2}{\varkappa^3(\varkappa^2+k^2)} C_1.
\end{aligned} \tag{27}$$

Cu ajutorul soluțiilor aproximative (16), (18), (19) de mai sus se pot efectua o serie de aplicații numerice asupra manevrelor optime de apropiere și atingere a punctelor de librație din sistemul Lună—Pămînt.

Observație

Cazul particular, în care se neglijează influența forței Coriolis, se obține făcînd $\omega = 0$ în rezultatele precedente. Astfel, constantele de integrare vor avea următoarele expresii [1] :

$$C_1 = \frac{4k}{k^2\tau^2 - \operatorname{sh}^2 k\tau} [k\xi_0 \operatorname{sh}^2 k\tau - V_{\xi_0}(k\tau - \operatorname{sh} k\tau \operatorname{ch} k\tau)]$$

$$C_2 = -\frac{4k}{k^2\tau^2 - \operatorname{sh}^2 k\tau} [k\xi_0(k\tau + \operatorname{sh} k\tau \operatorname{ch} k\tau) + V_{\eta_0} \operatorname{sh}^2 k\tau)]$$

$$C_3 = -\frac{4\varkappa}{\varkappa^2\tau^2 - \sin^2 \varkappa\tau} [\varkappa\eta_0 \sin^2 \varkappa\tau - V_{\eta_0}(\varkappa\tau - \sin \varkappa\tau \cos \varkappa\tau)$$

$$C_4 = \frac{4\varkappa}{\varkappa^2\tau^2 - \sin^2\varkappa\tau}\left[\varkappa\eta_0(\varkappa\tau + \sin\varkappa\tau\cos\varkappa\tau) + V_{\eta_0}\sin^2\varkappa\tau\right]$$

$$C_5 = \xi_0$$

$$C_6 = \frac{1}{k^2\tau^2 - \operatorname{sh}^2 k\tau}\left[\xi_0(k\tau + \operatorname{sh} k\tau \operatorname{ch} k\tau) + k\tau^2 V_{\xi_0}\right] \tag{28}$$

$$C_7 = \eta_0$$

$$C_8 = \frac{1}{\varkappa^2\tau^2 - \sin^2\varkappa\tau}\left[\eta_0(\varkappa\tau + \sin\varkappa\tau\cos\varkappa\tau) + \varkappa\tau^2 V_{\eta_0}\right].$$

Calculele preliminare [1], [7] arată că în jurul punctelor de librație sînt posibile manevre orbitale ale unor vehicule spațiale prevăzute cu instalații de propulsie de mică tracțiune, astfel ca accelerațiile adimensionale a/g să fie cuprinse între 10^{-4} și 10^{-6}.

BIBLIOGRAFIE

1. *Al. Marinescu*, Low-thrust maneuvers near the libration points, Journal of Guidance and Control, 2, 1—2, march—april 1979.
2. *T. N. Edelbaum*, Libration point rendezvous, Rept. 70—12, Analytical Mechanics Associates, Cambridge, 1970.
3. *L. A. D'Amario, T. N. Edelbaum*, Minimum impulse three-body trajectories, AIAA Journal, 12, 4, pp . 455—462, 1974.
4. *K. A. Ehricke*, Space Flight, II. Dynamics, D. Van Nostrand Company Inc. Princeton, Ne w—York—London, pp. 230—250, 1962.
5. *Al. Marinescu*, Optimal low-thrust orbital rendezvous, Journal Spacecraft and Rockets, 13, 4, pp. 385—392, july 1976.
6. *Șt. Staicu*, Introducere în mecanica teoretică, Edit. Științifică și enciclopedică, București, 1983.
7. *Al. Marinescu, D. Dumitrescu*, Theory of optimal low-thrust maneuvers near the libration points, Rev. Roum. Sci. Techn—Méc. Appl., 26, 3, 1981.
8. *Al. Marinescu, Șt. Staicu*, Manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite eliptice, Bulet. Instit. Politehnic București, 35, 6, 1973.
9. *R. Voinea, D. Voiculescu, V. Ceaușu*, Mecanica, Edit. Didactică și pedagogică, București, 1983.
10. *B. H. Billik*, Some optimal low acceleration rendezvous maneuvers, AIAA Journal, 2, 3, pp. 510—516, march 1964.
11. *M. Rădoi, E. Deciu*, Mecanica, Edit. Didactică și pedagogică, București, 1981.
12. *M. Niță*, Teoria zborului spațial, Edit. Academiei R. S. România, București, 1973.
13. *M. Atanasiu*, Mecanica, Edit. Didactică și pedagogică, București, 1973.
14. *A. F. Kononenko*, Libration points approach, 18-th International Astronautical Congress, september 1967.

15. *C. Iacob*, Mecanică teoretică, Edit. Didactică și pedagogică, București, 1971.
16. *Al. Marinescu*, Probleme optimale în dinamica zborului spațial, Edit. Academiei R. S. România, București, 1982.
17. *Șt. Staicu*, Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor, Edit. Academiei R. S. România, București, 1986.

Manoeuvres optimales des véhicules spatiales autour des points de libration

L'article fait l'étude de la manoeuvre optimale à minimum de combustible d'un véhicle spatial, muni d'une installation de propulsion de petite traction, autour des points de libration du système Terre—Lune.

En appliquant la méthode variationelle, des relations pour la position, la vitesse et la traction sur l'unité de masse du vehicle spatial sont établies.

C.Z. :656.7

SISTEM OPTIMAL DE CONDUCERE A ZBORULUI ÎN ZONA AEROPORTULUI

A. STOICA*

În lucrarea de față se studiază, utilizînd principiul lui Pontriaghin, problema minimizării consumului de combustibil al avioanelor, în zona aeroportului, pe parcursul unei evoluții în plan orizontal, presupunînd stările inițiale și cele finale —fixate și timpul de sosire— liber.

Rezultatele teoretice obținute în urma determinării comenzilor optimale și a rezolvării problemei bilocale, sînt ilustrate pe modelul matematic simplificat al unui avion de tip ROMBAC 1—11, evidențiindu-se totodată și efectele economice generate prin utilizarea traiectoriilor optimale.

Introducere

Una dintre tendințele importante înregistrate în ultimii ani în direcția reducerii cheltuielilor de exploatare a avioanelor, o constituie minimizarea consumului de combustibil atît prin modificarea corespunzătoare a parametrilor constructivi, cît și prin optimizarea traiectoriilor de zbor.

În cele ce urmează se va studia problema conducerii optimale a avioanelor de tip subsonic, în zona aeroportului, pe parcursul unei evoluții în plan orizontal, între două puncte fixate, astfel încît cantitatea de combustibil consumat să fie minimă.

Presupunînd cunoscut modelul matematic al aeronavei se vor determina expresiile analitice ale comenzilor optimale și se vor desprinde importante concluzii asupra formei traiectoriilor optimale.

Totodată, în cadrul lucrării se prezintă metoda de rezolvare a problemei bilocale generată de utilizarea principiului minimului, precum și rezultatele numerice obținute prin aplicarea algoritmilor de conducere optimală pentru un avion de tip ROMBAC 1—11.

Notații utilizate

T — tracțiunea
D — rezistența la înaintare
H — hamiltonianul
J — indicele de performanță
T_{max} — valoarea maximă a tracțiunii
T_{min} — valoarea minimă a tracțiunii
c_0, c_1, c_2 — constante ce intervin în expresia debitului de combustibil

* Asist. ing., catedra Aeronave

g — accelerația gravitațională
k_1, k_2 — constante ce intervin în expresia rezistenței la înaintare
m — masa aeronavei
x, y — coordonatele de poziție în plan orizontal
v — viteza
v_c — viteza de croazieră
λ — variabilă adjunctă
Φ — unghiul de înclinare (bank angle)
u — $\operatorname{tg}\Phi$
$u_{\max}$ — $\max|u|$
ψ — unghiul dintre cap și axa OX
f — debitul de combustibil
τ, μ — valori intermediare ale comenzilor optimale

1. Formularea problemei

În cadrul problemei abordate se presupun satisfăcute următoarele ipoteze simplificatoare, care sînt valabile într-un număr mare de aplicații numerice :

1) Aeronava se consideră un solid rigid în spațiu.

2) Zborul pe traiectoria optimală se desfășoară în plan orizontal.

3) Efectele variației masei avionului, datorate arderii combustibilului sînt neglijabile în optimizarea traiectoriei, deci masa este constantă

4) Vitezele pentru care au loc relațiile $T_{\max} = D$ sau $T_{\min} = D$, se situează în afara domeniului de valori admisibile ale vitezei.

5) Se presupune că debitul de combustibil este pozitiv pentru orice valoare a tracțiunii și că este îndeplinită relația $T_{\min} > -\dfrac{c_1}{2c_2}$.

În condițiile ipotezelor de mai sus, ecuațiile de mișcare a aeronavei în plan orizontal sînt :

$$\dot{x} = v\cos\psi \tag{1}$$

$$\dot{y} = v\sin\psi \tag{2}$$

$$\dot{\psi} = -g\,u/v \tag{3}$$

$$\dot{v} = (T - D)/m \tag{4}$$

în care comenzile $T(t)$ și $u(t)$ sînt supuse restricțiilor :

$$T_{\min} \leqslant T(t) \leqslant T_{\max} \tag{5}$$

$$|u(t)| \leqslant u_{\max} \tag{6}$$

iar rezistența la înaintare se aproximează prin relația analitică :

$$D = k_1 v^2 + k_2(1 + u^2)/v^2 \tag{7}$$

Problema tratată în lucrare se formulează astfel : fiind dat sistemul (1—4) cu comenzile admisibile supuse restricțiilor (5) și (6), se cere determinarea comenzilor optimale $T^*(t)$ și $u^*(t)$ care transferă sistemul din starea inițială arbitrar fixată :

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \qquad \psi(0) = \psi_0, \qquad v(0) = v_0$$

în starea finală fixată :

$$x(t_f) = 0, \qquad y(t_f) = 0, \qquad \psi(t_f) = 2k\pi \qquad (k \in Z), \qquad v(t_f) = v_f$$

asigurînd minimizarea consumului de combustibil :

$$J = \int_0^{t_f} f(t)\, \mathrm{d}t \tag{8}$$

unde debitul de combustibil $f(t)$ se poate aproxima prin expresia analitică :

$$f(t) = c_0 + c_1 T(t) + c_2 T^2(t) \tag{9}$$

Precizăm faptul că în problema formulată, timpul final t_f este considerat liber.

2. Determinarea comenzilor optimale

În conformitate cu principiul lui Pontriaghin, aplicat pentru problema cu timp final liber, comenzile optimale T^* și u^*, a căror existență este presupusă, trebuie să satisfacă relația :

$$\min_{T,\,u} H(x, y, \psi, v, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_\psi, \lambda_v, T, u) = H(x, y, \psi, v, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_\psi, \lambda_v, T^*\, u^*) = 0 \tag{10}$$

unde hamiltonianul H are expresia :

$$H = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + \lambda_x v \cos\psi + \lambda_y v \sin\psi - \lambda_\psi g\, u/v + \\ + \lambda_v [T - k_1 v^2 - k_2 (1 + u^2)/v^2]/m \tag{11}$$

iar variabilele adjuncte λ_x, λ_y, λ_ψ și λ_v sînt soluții ale sistemului adjunct :

$$\dot{\lambda}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda_x = \text{const} \tag{12}$$

$$\dot{\lambda}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow \lambda_y = \text{const.} \tag{13}$$

$$\dot{\lambda}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = v\,(\lambda_x \sin\psi - \lambda_y \cos\psi) \tag{14}$$

$$\dot{\lambda}_v = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_x \cos\psi - \lambda_y \sin\psi - \lambda_\psi\, g\, u/v^2 +$$

$$+ 2\,\lambda_v\,[k_1\, v - k_2(1 + u^2)/v^3]/m \tag{15}$$

Din relaţia de optimizare (10), cu hamiltonianul (11) şi restricţia (5) se obţine :

$$T^* = \begin{cases} T_{\max} \text{ dacă } \tau \geqslant T_{\max} \\ \tau \text{ dacă } T_{\min} \leqslant \tau \leqslant T_{\max} \\ T_{\min} \text{ dacă } \tau \leqslant T_{\min} \end{cases} \tag{16}$$

unde

$$\tau = -\frac{c_1 + \lambda_v/m}{2\,c_2} \tag{17}$$

Avînd în vedere faptul că variabila adjunctă $\lambda_v(t)$ este continuă, rezultă imediat că şi comanda optimală $T^*(t)$ este continuă.

De asemenea, din relaţia (17) şi din ipoteza (5) se constată că dacă $\lambda_v \geqslant 0$, rezultă $T^* = T_{\min}$

Minimizînd hamiltonianul în raport cu comanda u, supusă restricţiei (6), se obţine :

$$u^* = \begin{cases} \mu \text{ dacă } |\mu| < u_{\max} \quad \text{şi} \quad \lambda_v < 0 \\ u_{\max} \operatorname{sgn} \lambda_\psi \text{ dacă } |\mu| \geqslant u_{\max} \text{ şi } \lambda_v < 0 \end{cases} \tag{18}$$

unde

$$\mu = -\frac{g\, m\, v\, \lambda_\psi}{2\, k_2 \lambda_v} \tag{19}$$

Pe intervalele de timp pe care $\lambda_v \geqslant 0$ şi λ_ψ nu este identic nulă, comanda optimală are valoarea $u^* = u_{\max} \operatorname{sgn} \lambda_\psi$

Cazul $\lambda_v \geqslant 0$ şi λ_ψ identic nulă pe o porţiune a traiectoriei optimale, este exclus. Într-adevăr, din ecuaţiile (3) şi (14) rezultă că dacă λ_ψ este identic nulă pe un interval atunci $\psi = \text{const.}$ şi deci $u^* = 0$; minimizînd însă hamiltonianul în raport cu comanda u, cu $\lambda_\psi = 0$, se obţine $|u^*| = u_{\max}$ ceea ce contravine rezultatului anterior.

Deci, în concluzie, dacă $\lambda_v(t) < 0$, atunci comanda optimă $u(t)$ este continuă, iar dacă $\lambda_v(t) \geqslant 0$, $u(t)$ este discontinuă, punctele de discontinuitate apărînd în momentele în care $\lambda_v(t)$ îşi schimbă semnul.

3. Optimalitatea traiectoriilor rectilinii

Mai întîi vom demonstra prin reducere la absurd că o traiectorie optimală conține cel mult o porțiune rectilinie, aceasta putînd fi situată numai la începutul traiectoriei iar trecerea de la traiectoria rectilinie la cea curbă se realizează cu comenzile $T^* = T_{\min}$, $|u^*| = u_{\max}$.

Într-adevăr, să presupunem că porțiunea rectilinie a traiectoriei optimale se realizează pe intervalul de timp $[t_1, t_2] \subset (0, t_f]$. Deoarece această porțiune se caracterizează prin $\psi(t) \triangleq \psi_d = \text{const.}$ $(\forall)t \in [t_1, t_2]$ din ecuația (3) rezultă imediat că $u^*(t) = 0$, $(\forall)\, t \in [t_1, t_2]$. Comparînd acest rezultat cu expresia (18) a comenzii optimale, se deduce că :

$$\lambda_v(t) < 0, \ (\forall)t \in (t_1, t_2) \tag{20}$$

și

$$\lambda_\psi(t) = 0, \ (\forall)\ t \in [t_1, t_2]$$

Deoarece perechea $(\lambda_\psi = 0, \ \psi = \psi_d)$ reprezintă un punct de echilibru pentru ecuațiile (3) și (14), rezultă că la momentele t_1 și t_2 comanda optimală u^* trebuie să fie discontinuă deci

$$\lambda_v(t_i) = 0, \ i = 1, 2 \tag{21}$$

Așadar sînt îndeplinite relațiile :

$$\dot{\lambda}_v(t_1) < 0 \tag{22}$$

$$\dot{\lambda}_v(t_2) > 0 \tag{23}$$

Deoarece $\lambda_v(t_1) = \lambda_v(t_2) = 0$, din (16) rezultă :

$$T^*(t_1) = T^*(t_2) = T_{\min} \tag{24}$$

Înlocuind relațiile (20), (21), și (24) în (10), se obține :

$$c_0 + c_1 T_{\min} + c_2 T_{\min}^2 = - v(t_i)\,(\lambda_x \cos\psi_d + \lambda_y \sin\psi_d), \quad i = 1, 2 \tag{25}$$

Dar, din (20), rezultă :

$$\dot{\lambda}_\psi = v(\lambda_x \sin\psi_d - \lambda_y \cos\psi_d) = 0 \qquad (\forall)t \in [t_1, t_2] \tag{26}$$

Determinînd din ultimele două relații variabile adjuncte λ_x și λ_y și înlocuindu-le în ecuația (15), se obține :

$$\dot{\lambda}_v(t_i) = \frac{c_0 + c_1 T_{\min} + c_2 T_{\min}^2}{v(t_i)}; \qquad i = 1,2 \tag{27}$$

Ţinînd seama de ipoteza (5), din relaţia (27) rezultă $\dot{\lambda}_v(t_1) > 0$, ceea ce contrazice relaţia (22), deci în cadrul unei traiectorii optimale, nu se poate trece de la o porţiune curbă la una rectilinie; aşadar porţiunea rectilinie poate fi situată numai la începutul traiectoriei iar trecerea la o porţiune curbă se realizează prin comenzile optimale $T^* = T_{\min}$ şi $|u^*| = u_{\max}$.

În continuare vom demonstra că este posibil ca pe o porţiune rectilinie a unei traiectorii optimale, viteza de zbor să aibă o valoare constantă v_c, numai dacă verifică relaţia :

$$3\,c_2 k_1^2 v_c^8 + c_1 k_1 v_c^6 - (c_0 + 2\,c_2 k_1 k_2) v_c^4 - 3\,c_1 k_2 v_c^2 - 5\,c_2 k_2 = 0 \qquad (28)$$

Într-adevăr, din condiţia de croazieră $T_c^* = D(v_c)$, utilizînd ipoteza 4, rezultă imediat că $T_c^* \in (T_{\min}, T_{\max})$, deci :

$$T_c^* = -\frac{c_1 + \lambda_v/m}{2\,c_2} \qquad (29)$$

Eliminînd variabilele adjuncte λ_x şi λ_y, din ecuaţiile (10) şi (15) şi înlocuind valoarea comenzii optimale din (29), se obţine :

$$\dot{\lambda}_v v_c = c_0 + c_1(k_1 v_c^2 + k_2/v_c^2) + c_2(k_1 v_c^2 + k_2/v_c^2)^2 - \\ - 2\,c_2 (k_1 v_c^2 + k_2/v_c^2) + c_1](k_1 v_c^2 - k_2/v_c^2) \qquad (30)$$

Din relaţia (29) se observă că pe porţiunea optimaiă cu viteză constantă, variabila adjunctă λ_v este constantă deci $\dot{\lambda}_v = 0$: înlocuind în (30), se obţine ecuaţia (28).

Deoarece se poate arăta prin derivare că membrul drept al relaţiei (30) este strict descrescător în raport cu viteza de croazieră v_c, rezultă că ecuaţia (28) are o singură rădăcină pozitivă.

O proprietate remarcabilă a vitezei de croazieră optime determinate mai sus, este faptul că ea constituie o limită superioară (respectiv inferioară) a vitezei pe întreaga traiectorie optimală, în sensul că :

— dacă $v(0) < v_c$ şi $v(t_f) < v_c$ atunci $v(t) < v_c$, $(\forall) t \in [0, t_f]$

şi respectiv :

— dacă $v(0) > v_c$ şi $v(t_f) > v_c$ atunci $v(t) > v_c$, $(\forall)\, t \in [0, t_f]$

Într-adevăr, pentru prima parte a afirmaţiei, presupunem prin reducere la absurd că există un moment $t' \in (0, t_f)$ astfel încît :

$$v(t') > v_c; \quad \dot{v}(t') = 0 \quad \text{şi} \quad \ddot{v}(t') < 0 \qquad (31)$$

Derivînd ecuaţia (4) şi utilizînd relaţia (29), se obţine :

$$\ddot{v}(t') = -\frac{\dot{\lambda}_v}{2\,m^2\,c_2} \qquad (32)$$

Cum însă, membrul drept al ecuaţiei (30) este descrescător în raport cu v_c, rezultă $\dot{\lambda}_v(t') < 0$ deci $\ddot{v}(t') > 0$, ceea ce contrazice ultima inegalitate (31).

4. Determinarea traiectoriilor optimale; Rezultate numerice pentru avionul ROMBAC 1—11

O modalitate simplă de a determina traiectorii care satisfac condițiile necesare de optimalitate expuse în capitolele precedente o constituie integrarea inversă a ecuațiilor diferențiale (1—4) și (12—15), cu comenzile (16) și (18), alegînd arbitrar valorile inițiale pentru trei variabile adjuncte, a patra rezultînd din condiția anulării hamiltonianului.

În figura 1 sînt prezentate, utilizînd modelul unui avion ROMBAC 1—11, traiectorii obținute pentru diferite valori inițiale ale variabilelor adjuncte, integrarea inversă începînd la $t=0$ și stările finale fixate în formularea problemei. Prin convenție, unghiurile de înclinare pozitive corespund virajelor spre dreapta.

Traiectoriile pe parcursul cărora valorile vitezei nu respectă ipoteza 4 au fost eliminate.

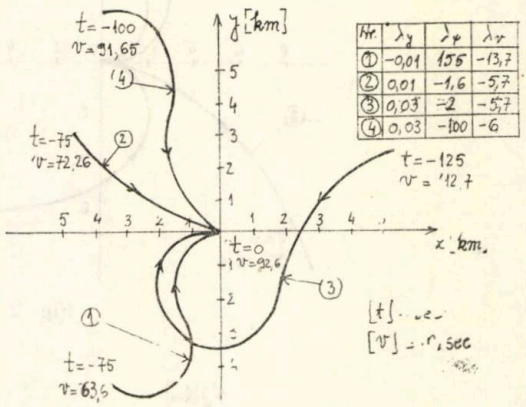


Fig. 1

O proprietate importantă a traiectoriilor, ce rezultă din particularitățile ecuațiilor (1—4), o constituie faptul că pot fi translatate și rotite astfel încît să satisfacă condițiile finale.

Deci integrarea inversă nu trebuie începută în mod obligatoriu din starea finală impusă; această observație permite obținerea fără dificultate a unor traiectorii optimale cu porțiuni rectilinii. Pentru aceasta se alege $v(t=0) < v_c$, și din relația (29), folosind condiția egalității tracțiunii cu rezistența la înaintare rezultă $\lambda_v(t=0)$; se realizează integrarea directă sau inversă a sistemului și a sistemului adjunct, de la valorile inițiale:

$$x(t=0) = y(t=0) = \psi(t=0) = 0\,; \quad v(t=0)\,; \quad \lambda_\psi\,(t=0) = 0\,;$$

$$\lambda_v\,(t=0)\,;$$

λ_y ales arbitrar și λ_x rezultat din condiția anulării hamiltonianului la $t=0$, pînă cînd se ajunge la valoarea finală v_f impusă vitezei.

Apoi se translatează și se rotește traiectoria obținută, astfel încît să fie îndeplinite și celelalte valori finale impuse:

$$x(t_f) = y(t_f) = 0 \quad \text{și} \quad \psi(t_f) = 2\,k\pi \quad (k \in Z).$$

Rezultatele obținute prin acest procedeu sînt prezentate în figura 2.

Metodele prezentate de obținere a unor traiectorii extremale, oferă informații calitative asupra alurii acestora dar de regulă, prin aplicarea lor nu se realizează condițiile la limită impuse stărilor.

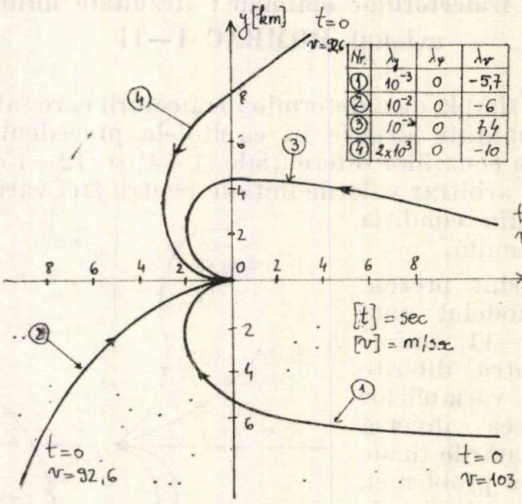


Fig. 2

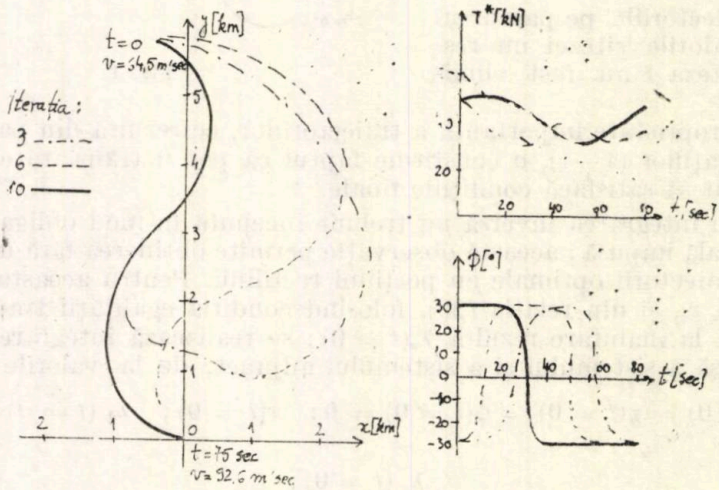


Fig. 3

Pentru rezolvarea problemei bilocale neliniare în raport cu stările, s-a folosit metoda Miele, care este prezentată pe larg în lucrarea [2].

Această metodă iterativă constă în esență din aplicarea procedeului Newton—Kantorovici—Raphson pentru liniarizarea ecuațiilor (1—4) și (12—15) și rezolvarea problemei bilocale liniare prin metoda soluțiilor particulare.

În figura 3 sînt prezentate, la diferite iterații, o traiectorie și comenzile optimale corespunzătoare, obținute prin rezolvarea problemei bilocale.

Liniarizarea este însă posibilă numai dacă membrii din dreapta ai ecuațiilor sînt funcții continue și cu derivatele continue.

Dar după cum s-a arătat în capitolul 2, comanda optimală $u^*(t)$ poate avea în anumite condiţii discontinuităţi de speţa întîi, ceea ce duce la imposibilitatea folosirii metodei de liniarizare. Pentru depăşirea acestei dificultăţi, se poate aproxima comanda $u^*(t)$, în jurul punctelor de discontinuitate, cu funcţii $\tilde{u}^*$ de clasă C^1, aşa cum se arată în figura 4.

Deşi prin utilizarea comenzii $\tilde{u}^*(t)$, nu vor mai fi respectate condiţiile necesare de optimalitate, din studiul numeric rezultă că pentru intervale $t_1 - t_2$ mici (de ordinul 3—4 sec), abaterea indicelui de performanţă faţă de cazul folosirii comenzii optimale $u^*(t)$, este sub 1%.

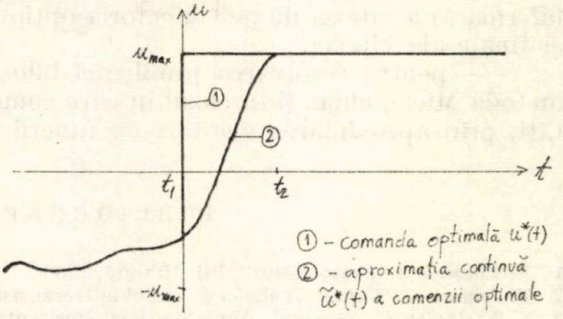


Fig. 4

Un alt aspect important legat de rezolvarea problemei bilocale îl constituie determinarea timpului final t_f.

Deoarece în expresia hamiltonianului timpul nu apare explicit şi nici nu dispunem de expresiile analitice ale stărilor şi ale variabilelor adjuncte, condiţia de necesitate (10) nu poate fi folosită direct pentru determinarea timpului final. Avînd în vedere că timpul final este liber, dacă relaţia (10) este satisfăcută într-un punct, de exemplu la momentul iniţial, atunci ea se verifică identic pe tot intervalul $[0, t_f]$. În urma rezolvării problemei bilocale, pentru o valoare a timpului final fixată arbitrar vor rezulta corespunzător acesteia, valorile iniţiale ale variabilelor adjuncte. Introducînd deci funcţia :

$$\Theta(t_f) = H(x, y, \psi, v, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_\psi, \lambda_v, T^*, u^*)\Big|_{t=0}$$

rezultă că timpul final t_f se obţine determinînd zerourile funcţiei $\Theta(t_f)$, ceea ce se realizează fără dificultate, prin utilizarea unei metode de căutare directă.

Calculul indicelui de performanţă (8) demonstrează faptul că prin aplicarea algoritmilor de conducere optimală prezentaţi mai sus, pe modelul unui avion de tip ROMBAC 1—11, se obţine o reducere de 11—16% a consumului de combustibil faţă de cazul unor evoluţii pe traiectorii neoptimale.

5. Concluzii

În lucrarea de faţă s-a studiat problema minimizării consumului de combustibil al avioanelor subsonice, în zona aeroportului, pe parcursul unei evoluţii în plan orizontal; prin aplicarea principiului minimului pentru cazul stărilor iniţiale şi finale fixate şi a timpului final liber, au rezultat următoarele concluzii:

— tracţiunea optimală este continuă pe parcursul întregii traiectorii dar unghiul de înclinare poate avea discontinuităţi determinate de variabilele adjuncte λ_ψ şi λ_v.

— traiectoria optimală conține cel mult o porțiune rectilinie, situată la începutul ei; trecerea de la porțiunea rectilinie la cea curbă se face cu $T^* = T_{\min}$ și $|u^*| = u_{\max}$.

— pe porțiunea rectilinie a unei traiectorii optimale se poate realiza regimul de croazieră numai dacă viteza verifică relația (28).

— viteza optimă de croazieră constituie o limită superioară (sau inferioară) a vitezei de pe traiectoria optimală, funcție de valorile inițiale și finale ale vitezei.

— pentru rezolvarea problemei bilocale se poate utiliza cu succes metoda Miele, chiar și în cazul în care comanda $u(t)$ prezintă discontinuități, prin aproximarea acesteia cu funcții de clasă C^1, convenabil alese.

BIBLIOGRAFIE

1. *N. Racoveanu*, „Automatica", Ed. Militară, 1980
2. *V. Ionescu, L. Lupaș*, „Tehnici de calcul în teoria sistemelor", Ed. Tehnică, 1974
3. *E. Kreindler, F. Neuman*, „Minimum Fuel Horizontal Flight Paths in the Terminal Area", Journal Guidance of Control, vol 5, oct. 1982
4. *N. Moisseev*, „Problèmes mathématiques d'analyse des systèmes", Editions Mir, 1985

Optimal Guidance for Aircraft on the Terminal Area

The problem of horizontal guiding of aircraft in the terminal area, minimizing the fuel consumption from an arbitrary point to another, with fixed arrival times, is formulated as a nonlinear optimal control problem and the control law solution is obtained by the application of Pontryagin's maximum principle.

It is examined the fuel optimality of straight-line flight paths and there are computed various types of representative extremals, using a method for solving two point boundary — value problems.

The theoretical results obtained are illustrated for an aircraft ROMBAC 1—11 and there are shown the performance differences between the optimal and nonoptimal trajectories.

C.Z. :656.025.4

CONSIDERAȚII PRIVIND OPTIMIZAREA PLANIFICĂRII DURATEI DE TRANSPORT A MĂRFURILOR ÎN CONDIȚIILE APARIȚIEI UNOR FLUCTUAȚII SEZONIERE ATÎT LA EXPEDITORI, CÎT ȘI LA DESTINATARI

I. V. CRISTEA*

În articol se prezintă o serie de aspecte speciale privind optimizarea planificării transportului și conservării mărfurilor perisabile, cu un sistem de transport cunoscut.

Mărimea duratei unui transport este deosebit de importantă în activitatea economică, mai ales atunci cînd sînt deplasate cantități mari de mărfuri perisabile de o valoare ridicată. Acest fapt impune cunoașterea și organizarea în mod corespunzător a activității de expediere, transport și depozitare a mărfurilor în condițiile concrete ale unei rețele de transport și aprovizionare cunoscute.

Problema planificării optime a transportului și conservării mărfurilor perisabile, cu un sistem de transport cunoscut, de exemplu sistemul feroviar (în general, mai răspîndit și mai eficient) este cunoscută și tratată atît în literatura de specialitate cît și în legislația economică de profil.

Cu toate acestea, apreciem că aprofunarea studiului transporturilor în etapa actuală este foarte necesară și utilă, de aceea în cele ce urmează ne propunem că prezentăm un model matematic pentru optimizarea duratei de transport în condițiile apariției unor fluctuații sezoniere în operațiile de expediere, luînd în considerare atît efectele ce se transmit și se regăsesc în mărimea totală a duratei de transport, cît și efectele ce apar la stația de destinație, în durata totală a descărcării vagoanelor,mai ales atunci cînd mărfurile sînt perisabile și de valoare ridicată.

Diferența ce apare între momentele de încărcare a vagoanelor la expediere și cele de descărcare a mărfurilor la destinație se poate stabili pe baza cunoașterii duratei totale de transport (pe un traseu prestabilit).

Durata totală de transport, de la expeditor și pînă la destinatar, este compusă din duratele parțiale necesare mișcării vagoanelor (vehiculelor) în mod succesiv prin toate punctele ce compun traseul respectiv.

Pentru studierea interdependenței între procesele de producție a mărfurilor și cele de transport și distribuție sau/ și depozitare pînă la consumatorul final, respectiv păstrarea calității mărfurilor în procesul de expediere, transport, descărcare și depozitare, este necesar să fie bine cunoscute și organizate atît procesele și activitățile de depozitare (temperaturi

* Ing., coordonator al transportului local

constante, temperaturi scăzute, locul depozitării etc.) cît și cele de transport (mișcare, manevră, descărcare, depozitare, etc.).

Așa cum se știe, orice rețea de transport (feroviar, rutier, maritim etc.) este alcătuită din noduri (stații de încărcare—descărcare triaje, porturi etc.) pe care le notăm cu indicii $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Fiecare arc din rețeaua respectivă îl vom nota cu $(i_0, i) \in R$, unde R reprezintă mulțimea tuturor arcelor rețelei de transport pe traseul pe care vom planifica în mod optim durata totală de transport în directă concordanță cu o serie de mărimi date pe care trebuie să le cunoaștem de la începutul activității de optimizare. Astfel vom nota cu :

$\bar{C}_{i_0, i_1}$ — costul transportului l, în mii tone marfă sau în mii lei.

$\bar{C}^{\circ}_{i_0, i_1}$ — costul transportului l, în mii vagoane neîncărcate sau în mii lei.

$\bar{T}_{i_0, i_1}$ — durata transportului vagoanelor încărcate pe arcul (i_0, i_1) incluse jumătate în locație în nodurile i_0 și i_1 /24 ore.

$\bar{T}^{\circ}_{i_0, i_1}$ — durata transportului vagoanelor goale pe arcul (i_0, i_1) incluse jumătate în locație în nodurile i_0, i_1/ 24 ore.

Pentru fiecare pereche de noduri i, j, determinăm legăturile lor cele mai ieftine (optime de pe poziția optimului economie inaționale) după tariful (respectiv costul) $\bar{C}_{ie}$, i_{l+1} și itinerariul L_{ij}, în însuși lungul arcelor $(i_0, i), (i_1, i_2) \ldots (i_{y-1}\, i_y)$, unde : $i_0 = i$; $i_y = j$.

În continuare vom determina costul specific al transportului l, în mii tone marfă, din punctul i pînă la punctul j pe itinerariul $L_{i,j}$ și îl vom nota cu $\bar{C}_{ij}$.

Durata transportului mărfurilor respective pe acest itinerar o vom nota cu $T_{i,j}$.

În mod analog vom determina pentru fiecare pereche de noduri itinerariul $L_{i,j}$ cel mai ieftin (optim, după tariful (costul) $\bar{C}^{\circ}_{i,j,i_1+1}$ și mărimile $\bar{C}^{\circ}_{i,j}$; $T^{\circ}_{i,j}$, care caracterizează costul și durata transportului pe itinerariul L°_{ij}, al vagoanelor (vehiculelor) neîncărcate.

În continuare, mărimile C_{ij} ; $C^{\circ}_{i,j}$; T_{ij}, T°_{ij} și de asemenea parametrii : ω, N, f_i, φ_i, ε_i vor fi considerați ca fiind cunoscuți de la începutul activității de optimizare și vor avea următorul conținut :

C_{ij} și C°_{ij} — Costul încărcării și descărcării a unei mii de tone de marfă din rețeaua feroviară i din luna k în mii lei/ mii tone.

T_{ij} și T°_{ij} — Cheltuiala de timp pentru încărcarea și descărcarea vagoanelor, inclusiv timpul de introducere și scoatere de la încărcare pe 24 de ore

ω — Cheltuielile legate de creșterea parcului de vagoane raportate la cheltuielile totale anuale în lei/număr de vagoane

N — Numărul total de vagoane luat în considerare la începutul perioadei de plan, în mii vagoane.

f_i — Capacitatea depozitului din nodul de rețea i conform momentului începerii de plan (decadă, lună, trimestru, an, cincinal) în mii tone.

φ_i — Cheltuielile legate de creșterea capacității depozitului din rețeaua i raportate la cheltuielile totale anuale pentru o mie de tone, în lei/mii tone capacitate.

ε_i — Cheltuielile legate de păstrarea în depozit a unei tone de marfă, care se găsește în rețeaua feroviară i, în timp de 24 de ore din luna k măsurată în lei/mii tone/zi.

În afară de aceste mărimi se consideră ca fiind date (respectiv cunoscute) și următoarele mărimi :

C_i^{ps} — Costul încărcării în vagonul l, mii tone marfă pe depozit.

C_i^{pp} — Costul încărcării în vagonul l, mii tone marfă pe întreprindere.

C_i^{vs}, C_i^{vp} — Costul descărcării din vagoane respectiv pe depozit și pe întreprindere.

C_i^{p-s}, C_i^{s-p} — Costul activității de predare a vagoanelor l, mii tone marfă, respectiv de la întreprindere la depozit și invers.

h — Norma încărcării vagonului cu marfă, tone/vagon.

l_j — Capacitatea inițială a parcului stației pentru vagoanele rămase încărcate și folosite ca „depozite pe roți" și a vagoanelor neîncărcate rămase în rezervă la stația i în mii vagoane.

λ_i — Plățile, legate de mărimea capacității parcului arătat mai înainte, în mii lei/mii vagoane.

Pentru fiecare nod al rețelei de transport (feroviar, rutier etc.) considerată este dată funcția continuă de timp $\alpha_i(t)$, care descrie intensitatea instantanee a producției din mărfurile ce vor fi transportate în perioada la care se referă optimizarea în cauză la $\alpha_1(t) < 0$; sau a consumului din aceleași mărfuri la $\alpha_i(t) > 0$ în momentul t și măsurat în unități valorice pe 24 de ore (mii lei/zi sau mii lei/24 ore).

Ca mărimi necunoscute în problema optimizării duratei de transport în condițiile apariției unor fluctuații sezoniere atît la expeditori cît și la destinatari sînt următoarele :

$X_{i,j}(t)$ — intensitatea expedierii mărfii din nodul i cu destinația în în nodul j și în momentul t, măsurat în mii tone/24 ore.

$Y_i(t)$ — stocul de marfă în depozit în nodul i în momentul t, măsurat în mii tone.

$E_{ij}(t)$ — intensitatea expedierii vagoanelor neîncărcate în momentul t din nodul i cu destinația în nodul j, măsurat în mii vagoane/ /24 ore.

$G_i(t)$ — cantitatea vagoanelor încărcate, care se găsesc în momentul t la stația i în calitate de „depozite pe roți".

$Z_i(t)$ — cantitatea vagoanelor neîncărcate, care se găsesc în momentul t la stația i, în rezervă, măsurate în mii vagoane.

ΔV_i — creșterea (sporirea) parcului de vagoane, măsurat în mii vagoane.

ΔW_i — creșterea capacității depozitului în nodul i, măsurat în mii tone.

Δl_i — creșterea capacității parcului, destinată pentru vagoanele rămase în stația i, măsurat în mii vagoane.

În afară de acestea, pentru descrierea proceselor de transport a mărfurilor și a vagoaneor în interiorul unor noduri dintre stații, depozite și întreprinderi se introduc în mod suplimentar ca funcții necunoscute de timp, care vor descrie intensitatea acestor procese :

$N_i^{vp}(t)$ — intensitatea expedierii mărfii în momentul t din nodul i de la stația de încărcare pînă la descărcarea ei la întreprindere, în mii tone /24 ore.

$N_i^{vs}(t)$ — intensitatea expedierii mărfii în momentul t din nodul i de la stația de încărcare pînă la descărcare la depozit în mii tone/24 ore.

$N_i^{p-s}(t)$ — intensitatea expedierii mărfii în momentul t din nodul i de la întreprindere pînă la depozit în mii tone/24 ore.

Funcţiile $N_i^{pp}(t)$; $N_i^{ps}(t)$; $N_i^{s-p}(t)$, descriu momentele intensităţii fluxurilor de marfă analoage cu cele descrise mai înainte dar în direcţii inverse.

Prin T_i^{vp}; T_i^{pp}; T_i^{vs}; T_i^{ps} sînt notate cheltuielile în timp pentru mişcarea vagoanelor încărcate sau descărcate din momentul dirijării lor spre staţiile din componenţă, la întreprindere sau depozit, pentru a realiza acolo o operaţie corespunzătoare de încărcare şi pînă în momentul înapoierii lor în staţii.

Mărimile acestora vor fi considerate ca fiind date, respectiv cunoscute.

Avînd în vedere cele expuse pînă acum, se apreciază că problema privind optimizarea planificării duratei de transport a mărfurilor în condiţiile apariţiei unor fluctuaţii sezoniere atît la expeditori cît şi la destinatari, poate fi formulată sub următoarele aspecte mai importante : Se vor considera mai întîi funcţiile de timp $X_{ij}(t)$ $E_{ij}(t)$; $i, j,=1...m$; $Y_i(t)$; $G_i(t)$; $Z_i(t)$; $N_i^{vp}(t)$; $N_i^{pp}(t)$; $N_i^{vs}(t)$; $N_i^{pl}(t)$; $N_i^{p-s}(t)$; $N_i^{s-p}(t)$; $i = 1 \ldots m$, şi de asemenea, vom considera şi mărimile ΔW_i şi Δl_i; $i = 1 \ldots m$, V, care au minimizat suma de care depind cheltuielile totale inclusiv cele de inverstiţii şi vom scrie ecuaţia (1) al cărui minim îl căutăm

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \int_0^T (C_{ij} X_{ij}(t) + C_{ij}^{\circ} E_{ij}(t))\, dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \int_0^T Y_i(t)\, dt + \sum_{i=1}^{m} \int_0^T (C_i^{vp} N_i^{vp}(t) + C_i^{pp} N_i^{pp}(t) +$$

$$C_i^{vs} N_i^{vs}(t) + C_i^{ps} N_i^{ps}(t) + C_i^{p-s} N_i^{p-s}(t) + C_i^{s-p} N_i^{s-p}(t))dt +$$

$$\sum_{i=1}^{m} (\varphi_i W_i + \lambda_i L_i) + \omega v \to \min. \qquad (1)$$

În această ecuaţie, în fiecare moment de timp $t \in (0, T)$, trebuie respectate următoarele condiţii :

a) Bilanţul de mărfuri pe staţii :

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij}(t - T_{i,j}) - \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(t) + N_i^{pp}(t - T_i^{pp}) - N_i^{PS}(t - T_i^{PS}) -$$

$$- N_i^{vp}(t) - h\dot{g}_i(t) = 0;\ i = 1, \ldots, m \qquad (2)$$

b) Bilanţul de mărfuri pe întreprinderi ;

$$- N_i^{pp}(t) + N_i^{vp}(t - T_i^{vp}) - N_i^{s-p}(t) + N_i^{s-p}(t - T_i^{sp}) = \alpha_i(t);$$

$$i = 1, \ldots, m \qquad (3)$$

c) Bilanţul de mărfuri pe depozite :

$$- N_i^{ps}(t) + N_i^{vs}(t - T_i^{vs}) - N_i^{s-p}(t) + N_i^{p-s}(t - T_i^{m-s}) -$$

$$- \dot{Y}_i(t) = 0;\ i = 1, \ldots, m \qquad (4)$$

La întocmirea ecuației bilanțului se consideră că intensitatea sosirii mărfii în punctul final în momentul t este egală cu intensitatea expedierii ei spre punctul inițial în momentul $(t - T)$ unde T – este durata transportului prin corespondență. Punctul deasupra simbolurilor funcțiilor g, z, y, reprezintă, așa cum se știe, derivata acestora în funcție de timp.

d) Bilanțul vagoanelor neîncărcate pe stații

$$\sum_{j=0}^{m} E_{ij}(t - T_{ij}^{\circ}) - \sum_{j=1}^{m} E_{ij}(t) + \frac{1}{h}(N_i^{vp}(t - T_i^{vp}) + \tag{5}$$

$$+ N_i^{vs}(t - T_i^{vs}) - N_i^{pp}(t) - N_i^{ps}(t) - Z_i^{\cdot}(t) = 0\,;\ i = 1, \ldots, m$$

În această ecuație se consideră că dacă în momentul $(t - T)$ vagoanele cu marfă se îndreaptă spre stația de destinație după descărcarea la întreprinderea sau depozitul aferent în momentul t ele se întorc goale, la stația de descărcare, activitatea desfășurîndu-se simultan în ambele sensuri.

Tot ce se posedă în sistemul parcului de vagoane în fiecare moment de timp poate fi reprezentat ca sumă a următoarelor componente :

— parcul vagoanelor care se găsește în mișcare ;
— parcul vagoanelor ocupate pentru operațiile de încărcare
— parcul vagoanelor încărcate care se folosesc ca „depozit pe roți"
— parcul vagoanelor descărcate rămase în rezervă.

Numărul fiecăreia dintre aceste părți componente ale parcului de vagoane se micșorează în timp, însă suma lor rămîne constantă pe parcursul tuturor perioadelor (lună, trimestru, an), socotite astfel încît să fie conform ipotezei unei totale creșteri a numărului de vagoane care se găsesc în serviciu pînă la începutul noului an de calcul.

În fiecare moment de timp, în mișcare se vor afla acele vagoane care în acel moment (considerat) se îndreaptă spre stația inițială însă, încă nu au ajuns la destinație. Dacă intensitatea se micșorează în timp, expedierea vagoanelor spre stația inițială se înscrie în funcția $Z(t)$, iar durata transportului este egală cu T. În momentul t, numărul vagoanelor în mișcare pe itinerariul considerat se află cu ecuația :

$$\int_{t-T}^{t} Z(v)\,dv$$

Condițiile care determină permanent numărul total de vagoane (N) din parcul luat în considerare la începutul perioadei de plan sînt date de ecuația (6).

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{h}\int_{t-T_{ij}}^{t} X_{ij}(v)\,dv + \int_{t-T_{ij}}^{t} E_{ij}(v)\,dv\right) +$$

$$+\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{t-T_i^{vp}}^{t} N_i^{vp}(v)\,dv + \int_{t-T^{pp}}^{t} N_i^{pp}(v)\,dv + \right. \tag{6}$$

$$\left. + \int_{t-T_i^{vs}}^{t} N_i^{vs}(v)dv + \int_{t-T^{sp}}^{t} N_i^{ps}(v)\,dv\right) + \sum_{i=1}^{m}(g_i(t) + Z_i(t) - v = N \text{ (mii vagoane)}.$$

De asemenea, condițiile de necreștere a capacității stocurilor în depozite și a parcului pentru vagoanele rămase sînt următoarele :

$$Y_i(t) - W_i \leqslant \varphi_i \; ; \; i = 1,\ldots,m \tag{7}$$

$$g_i(t) + Z_i(t) - L_i \leqslant l_i \; ; \; i = 1,\ldots,m \tag{8}$$

Caracterul ciclic al parcului asigură respectarea următoarelor condiții limită :

$$\left.\begin{aligned} Y(0) &= Y(T) \\ g_i(0) &= g_i(t) \\ Z_i(0) &= Z_i(t) \end{aligned}\right\} \; i = 1,\ldots,m \tag{9, 10, 11}$$

Toate funcțiile și mărimile inverse trebuie să fie negative.

Calculul de minim (de optimizare a planificării duratei de transport a mărfurilor în condițiile unor fluctuații sezoniere atît la expeditori cît și la destinatari) la restricțiile puse în ecuațiile 2—11 trebuie reprezentat ca un calcul optimal al direcției de mișcare a sistemelor de vagoane (de vehicule) în spațiul feroviar pe fazele respective (fazorial).

Coordonatele determinate de anumite faze în procesul de transport feroviar, în condițiile unor fluctuații sezoniere, impun condițiile (restricțiile) determinate de ecuațiile 7—11 și de limitările expuse în ecuațiile 3 și 6 care reprezintă însăși ecuațiile funcționale cu abateri de argumente.

Legea mișcării vagoanelor de marfă în spațiul feroviar, în condițiile unor fluctuații sezoniere în intensitatea încărcării și descărcării lor, se înscrie ca un sistem de ecuații liniar diferențiale așa cum au fost expuse în ecuațiile 2,4 și 5, care au coeficienți constanți și argumente care se abat, uneori destul de mult, în jurul valorilor medii. Întregul sistem de calcul funcțional depinde linear de funcțiile necunoscute și are caracter de integrală.

Prin soluționarea problemelor concrete cu această teorie a conducerii optime se obțin avantaje importante, respectiv utilizarea eficientă a materialului rulant, realizîndu-se parametri optimi și se elimină staționarea vagoanelor și degradarea mărfurilor, așa cum rezultă din ecuațiile sistemului de calcul expus în prezentul articol.

Studierea unor asemenea probleme, în vederea evidențierii timpilor optimi de transport al mărfurilor perisabile și valoroase (economic și social) este utilizată în activitatea de conducere optimă a economiei transporturilor și prezintă interes pentru determinarea condițiilor principale și a stabilității direcțiilor de dezvoltare calitativă a activității economice.

Quelques considérations sur l'optimization de la durée de transport des marchandises dans les conditions d'apparition des fluctuations saisonnières

On présente une série d'aspects particuliers regardant la planification optimale du transport et de la conservation des marchandises périssables, le système de transport étant connu.

C.Z. :539.4.0143 :621.643.2/3

TENSIUNI ÎN RECIPIENTE TOROIDALE CU SECȚIUNE OVALIZATĂ SOLICITATE CU PRESIUNE INTERIOARĂ

H. GHEORGHIU, LUCIA FETCU*

Pentru determinarea tensiunilor circumferențiale, învelișul toroidal ovalizat, cu grosimea peretelui variabilă, supus la presiune interioară este înlocuit cu un model cu secțiune circulară, solicitat cu o sarcină variabilă. Studiul modelului conduce la o metodologie neliniară pentru determinarea tensiunilor.

În cazul solicitării cu presiune interioară a învelișurilor cu axă curbă, se produc în mod necesar eforturi de încovoiere, chiar dacă nu are loc nici un fel de singularitate, nici în ceea ce privește suprafața și nici în distribuția sarcinii. Aceste eforturi se adaugă celor de membrană [4].

Abordarea problemei cu ajutorul ecuațiilor de echilibru în teoria cu momente necesită utilizarea unor metode de calcul aproximative [3], [4]. Volumul foarte mare de lucru pe care l-ar implica o astfel de rezolvare în cazul învelișurilor cu secțiune ovalizată și grosime de perete variabilă, justifică adoptarea unor modele bazate pe ipoteze simplificatoare. Un astfel de model este prezentat în cele ce urmează.

Prin secționarea unui înveliș toroidal de secțiune circulară și grosime variabilă cu două plane perpendiculare pe axa mediană, care fac între ele unghiul $d\alpha$, se obține un inel cu lățimea $Rd\alpha(1 + c\cos\theta)$, în care $c = r/R$ (Fig. 1). Variația grosimii peretelui poate fi aproximată prin expre-

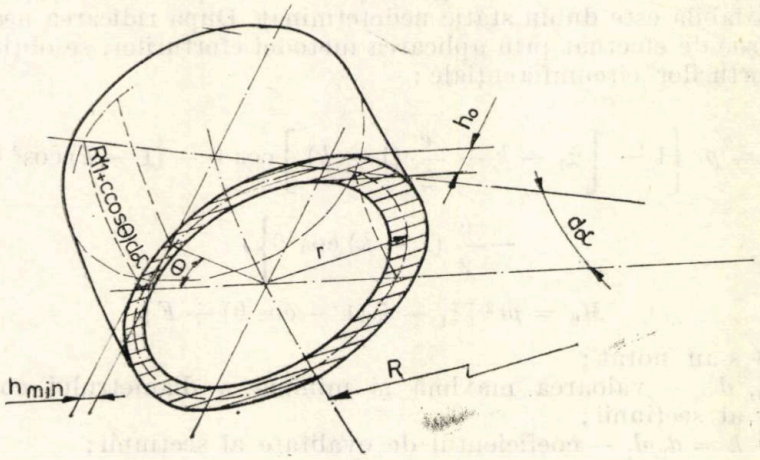


Fig. 1

* Șef lucrări dr. ing.; Șef lucrări dr. ing., catedra Rezistența materialelor.

sia $h(\theta) = h_0\left[1 - \left(1 - \frac{h_{min}}{h_0}\right)\cos\theta\right]$ rezultată din ipoteză că, față de secțiunea cu grosime uniformă h_0, la care conturul interior și cel exterior sînt cercuri concentrice, în cazul considerat centrele sînt deplasate relativ cu distanța $h_0 - h_{min}$.

Pentru a introduce în calcule efectul ovalizării, se consideră că starea de tensiune din inelul ovalizat, solicitat cu presiune uniformă, este aceeași cu cea dintr-un inel de secțiune circulară, solicitat cu o presiune variabilă ale cărei componente sînt arătate în figura 2, astfel încît să fie respectată

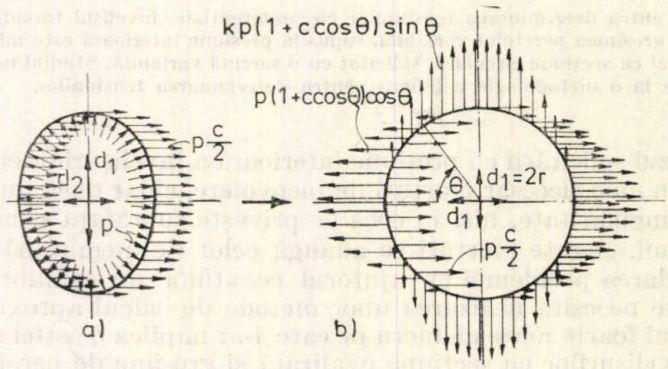


Fig. 2

echivalența statică dintre cele două modele [1]. În desen este reprezentată și componenta $pc/2$, provenită din proiecția pe planul inelului a eforturilor axial $N_x = \pi rp/2$ care acționează pe planele de secțiune [2].

Sub acțiunea sarcinilor figurate, inelul detașat din învelișul cu grosime variabilă este dublu static nedeterminat. După ridicarea nedeterminării, ușor de efectuat prin aplicarea metodei eforturilor, se obțin expresiile eforturilor circumferențiale:

$$N_\theta = pr\left\{1 + \left[\xi_1 - k + \frac{c}{2}(1-k)\right]\cos\theta - (1-k)\cos^2\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{c}{2}(1-k)\cos^3\theta\right\}, \tag{1}$$

$$M_\theta = pr^2\,[\xi_1 - \xi_2(1 - \cos\theta) + F], \tag{2}$$

în care s-au notat:

d_1, d_2 — valoarea maximă și minimă a diametrului conturului median al secțiunii;

— $k = d_2/d_1$ — coeficientul de ovalitate al secțiunii;

$$-\xi_1 = \frac{I_{20}I_{12} - I_{10}I_{22}}{I_{11}I_{22} - I_{12}^2}\;;\quad \xi_2 = \frac{I_{20}I_{11} - I_{10}I_{12}}{I_{14}I_{22} - I_{12}^2}\;; \tag{3}$$

$$-I_{10}=\int_0^{\pi}\frac{F}{G}\,\mathrm{d}\theta\,;\quad I_{20}=\int_0^{\pi}\frac{F(1-\cos\theta)}{G}\,\mathrm{d}\theta\,; \tag{4}$$

$$I_{11}=\int_0^{\pi}\frac{1}{G}\,d\theta\,;\quad I_{22}=\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos\theta)^2}{G}\,\mathrm{d}\theta\,;\quad I_{12}=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos\theta}{G}\,\mathrm{d}\theta\,;$$

$$-G=(1-a\cos\theta)^3(1+c\cos\theta)\,; \tag{5}$$

$$-a=1-h_{\min}/h_0\,; \tag{6}$$

$$-F=\frac{k+1}{2}+c\frac{2k+1}{6}-k\left(1+\frac{c}{2}\right)\cos\theta+$$

$$+\frac{k-1}{2}\cos^2\theta+c\frac{k-1}{6}\cos^3\theta \tag{7}$$

Deoarece rezolvarea integralelor (4) în funcție de parametrii k și c conduce la expresii complicate, greu de utilizat, ele se pot evalua prin calcul numeric, după precizarea valorilor particulare ale acestor parametri, cu ajutorul unui program de calculator.

Pentru determinarea tensiunii circumferențiale σ_θ se folosește relația cunoscută din teoria învelișurilor cilindrice [3]:

$$\sigma_{\theta\,\mathrm{ext}}^{\mathrm{int}}=\frac{N_\theta}{h}\pm\frac{6M_\theta}{h^2} \tag{8}$$

Relațiile (1), (2) și, ca urmare, relația (8), sînt liniare în raport cu presiunea aplicată numai dacă parametrii geometrici nu variază ca urmare a deformațiilor. În realitate, la învelișurile ovalizate cu pereți subțiri, deplasările produse de solicitarea cu presiune interioară sînt de același ordin de mărime cu diferența dintre valorile extreme ale conturului median, astfel încît parametrul k este și el dependent de presiunea aplicată. Aceasta explică variația neliniară a tensiunilor cu presiunea, care a fost constatată și pe cale experimentală [2].

Valoarea reală a parametrului k la presiunea de calcul se determină cu relația:

$$k=\frac{d_2+\Delta(d_2)}{d_1+\Delta(d_1)}, \tag{9}$$

în care $\Delta(d_1)$ și $\Delta(d_2)$ sînt modificările diametrelor d_1 și d_2 ca urmare a deformațiilor. Ele pot fi exprimate, folosind deplasările punctelor diametral opuse din inelul static nedeterminat, sub forma:

$$\Delta(d_1)=2\frac{pr^4}{EI_0}(AI_1+BI_2+CI_3+DI_4)\,;$$

$$\Delta(d_2) = \frac{pr^4}{EI_0}(AI_1' + BI_2' + CI_3' + DI_4'), \tag{10}$$

în care:

$$-I_0 = h_0^3/12;$$

$$-A = \xi_1 - \xi_2 r + \frac{k+1}{2} + c\,\frac{2k+1}{6};\quad B = \xi_1 r - k - \frac{kc}{2}$$

$$C = \frac{k-1}{2};\quad D = c\,\frac{k-1}{6};$$

$$-I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos^{n-1}\theta \cdot \sin\theta}{G}\,d\theta,\ n = 1, 2, 3, 4; \tag{11}$$

$$-I_n' = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos^n\theta}{G}\,d\theta,\ n = 1, 2, 3, 4.$$

Integralele (11) se pot evalua, ca și integralele (4), prin calcul numeric.

Relația (9) se aplică prin recurență, considerînd că la presiunea de calcul se ajunge prin intermediul unui număr oarecare de trepte de presiune. Pentru fiecare treaptă se determină creșterile celor două diametre d_1, d_2, apoi noua valoare a lui k cu care se reia calculul pentru treapta următoare.

Metodologia de calcul rezultată din aplicarea modelului prezentat a fost utilizată pentru determinarea tensiunilor într-un înveliș cu caracteristicile: $d_1 = 719$ mm; $d_2 = 684$ mm; $R = 3500$ mm; $h_0 = 9$ mm; $h_{min} = 8{,}6$ mm, la presiunea $p = 4$ MPa. Variația pe circumferință a tensiunilor rezultate din calcul este reprezentată în figura 3. Comparînd

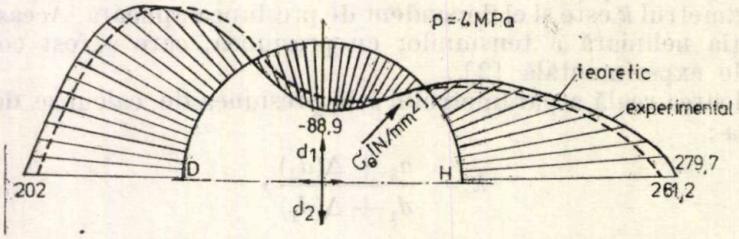


Fig. 3.

această curbă cu cea a tensiunilor determinate pe cale experimentală pentru un model cu aceleași caracteristici geometrice, se constată o foarte bună concordanță (abaterea maximă s-a înregistrat în punctul cel mai solicitat și este de 7%).

BIBLIOGRAFIE

1. *H. Gheorghiu, M Blumenfeld*, Hoop Stresses in Ovalised Cylindrical Tubes with Variable Thickness Walls, Rev. Roum. Sci. — Techn. — Méc. Appl., Tome 30, no. 5, 1985
2. * * * Măsurări tensometrice în vederea stabilirii procedeului de consolidare a porțiunilor curbe din conducta de transport țiței Constanța — Bărăganu, Contract de cercetare științifică nr. 230 RM, I.P.B., 1979.
3. *S. D. Ponomariov și col.*, Calcule de rezistență în construcția de mașini, vol. II, Editura tehnică, București, 1963 (taducere din limba rusă).
4. *S. Timoshenko, S. Woinarovski-Krieger*, Teoria plăcilor plane și curbe, Editura tehnică București, 1968 (traducere din limba engleză).

Stresses in Ovalised Toroidal Tubes, with Variable Thickness Walls, Submitted to Internal Pressure

A circular section model, submitted to variable pressure is used to replace the ovalised toroidal shell with variable thickness walls, submitted to internal constant pressure. The study of the model leads to a nonlinear methodology to determine the hoop stress.

BOOKS

Gh. Frăţilă, Gh. Măreuleseu, SISTEMELE DE FRÎNARE ALE AUTOVEHICULELOR/ Braking Systems for Vehicles, Editura Tehnică, Bucureşti, 1933, 317 p.

The book contains the most important data on braking theory, as well as estimation and design of braking systems for vehicles.

The first part presents dynamics of vehicle — and truck — trailer combination braking and the influence of varied circumstances on braking capacity and stability of braked vehicle.

Then, the authors treat about design and estimation of drum-internal block-disk-and strap brakes, as well as transmission of braking devices. Braking systems sizing and brakes control by mechanical and heat stress are also described.

The last part of the book shows special devices for increasing braking efficiency (braking regulators and antiblocking devices), together with speed-cutting devices.

TEZE DE DOCTORAT SUSȚINUTE ÎN 1986

Mihail Jelev — Contribuții la studiul acționării locomotivelor cu motoare asincrone în scurt circuit (21.III.1986) Conducător științific. prof. dr. ing. Alexandru Popa

Ion Stroe — Interferențe între mișcarea în jurul centrului de masă și mișcarea pe traiectorie a vehiculului spațial (19.IV.1986) Conducător științific prof. dr. ing. Mihai Niță

Eugeniu Țurlea — Optimizarea greutății structurii de rezistență a suprafețelor portante prevăzute cu comenzi servoasistate cu luarea în considerare a fenomenului de flutter (16.VI.1986) Conducător științific prof. dr. docent Augustin Petre

Ioana Ciornei — Utilizarea efectelor elastohidrodinamice în construcția variatoarelor de turație de tip frontal cu bile (9.VII.1986) Conducător științific prof. dr. docent V. N. Constantinescu

RECOMANDĂRI PRIVIND CONȚINUTUL ȘI REDACTAREA MANUSCRISELOR

În vederea menținerii unui conținut corespunzător și pentru uniformizarea prezentării articolelor, la înaintarea acestora pentru publicare autorii sînt rugați să țină seama de următoarele recomandări :

1. Lucrările să fie originale și să aibă caracterul unor comunicări științifice. Se acceptă numai lucrări care nu au mai fost publicate. Nu se vor face demonstrații dezvoltate, ci se vor prezenta rezultatele și informațiile necesare în vederea aplicării acestora.

2. Se vor publica și lucrări din domeniile matematicii, fizicii și chimiei, cu deosebire dacă ele prezintă un interes deosebit pentru activitățile inginerești.

3. Manuscrisul va fi dactilografiat pe coli format A4, la 2 rînduri, cu panglică neagră, pe o singură față a foii de hîrtie. Textul integral, inclusiv figurile, nu vor depăși 8—10 pagini.

4. Titlul dactilografiat cu majuscule și subliniat, trebuie să fie cît mai scurt.

5. Sub titlu se scriu prenumele autorilor (inițiala ; pentru autoare se va scrie prenumele întreg) și numele. Gradul didactic, titlul științific și instituția (pentru persoanele din institutul nostru se menționează numai catedra ; cînd autorii lucrează la aceeași catedră sau instituție, denumirea acesteia se scrie o singură dată) se scriu într-o notă de subsol pe prima pagină.

6. Articolul va fi precedat de un rezumat de 5—6 rînduri, în limba de redactare a lucrării, dactilografiat la $1^{1/2}$ rînduri.

7. Din punct de vedere redacțional, prezentarea conținutului propriu-zis se face conform STAS 8660—70, folosindu-se exprimarea impersonală (persoana a 3-a). Textul va fi dactilografiat cît mai estetic fără să abunde în cuvinte despărțite. La început de aliniat se lasă un spațiu de 7 semne.

8. Titlul subcapitolelor se scrie cu majuscule și nesubliniat.

9. Formulele se scriu, pe cît posibil, la mașină ; în rest, vor fi scrise de mînă, cu tuș negru, foarte citeț. Numerele pentru identificarea relațiilor matematice se scriu între paranteze rotunde, în partea dreaptă a paginii.

10. Tabelele vor avea titlu și vor fi numerotate în ordine.

11. Desenele se execută în tuș negru, pe hîrtie de calc, iar explicațiile se scriu cu șablonul. Legenda fiecărei figuri (dacă există) va fi prezentată într-un borderou de figuri, pe o foaie separată.

12. Bibliografia se scrie la sfîrșitul articolului, după capitolul de Concluzii, nu pe pagină separată, conform STAS 6158—70. Pentru prescurtarea titlurilor de publicații periodice se vor consulta STAS 6074—74 și listele din revistele de referate. Citarea bibliografiei se face astfel : 1) pentru cărți : inițiala și numele autorilor, titlul, editura, orașul, anul ; 2) pentru periodice : inițiala și numele autorilor, titlul articolului, titlul periodicului, numărul, anul.

13. După bibliografie se mai prezintă un rezumat, dactilografiat la $1^{1/2}$ rînduri : într-o limbă străină (rusă, engleză, germană, franceză) — dacă lucrarea este redactată în limba română, respectiv în limba română — dacă lucrarea este redactată într-o limbă străină (rusă, engleză, germană, franceză). Rezumatul va fi precedat de titlul lucrării în limba de redactare a rezumatului.

14. La depunerea lucrării, autorii vor prezenta o declarație din care să reiasă că nu conține secrete de stat.

Lucrarea urmează să fie publicată după recomandarea acesteia de către 2 referenți desemnați de comitetul de redacție.

COMITETUL DE REDACȚIE

I.P. Informația c. 2702

40.480